ÁREA Y VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

*Módulo d*iseñado por:

Docente María Cristina Marín Valdés

I.E. Eduardo Fernández Botero

Amalfi (Ant)

2018

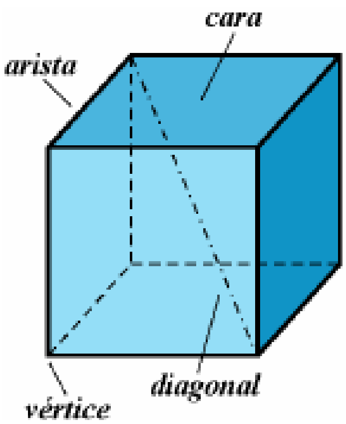
CONTENIDOS

CONCEPTO DE POLIEDROS

Un ***poliedro*** es un cuerpo geométrico que está limitado por cuatro o más polígonos.

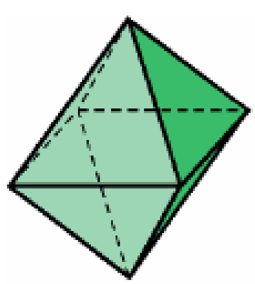
Los principales elementos de un poliedro son:

Caras o polígonos que lo limitan.
Aristas o lados de las caras.
Vértices o puntos de corte de las aristas.
Diagonales o segmentos que unen dos vértices de distintas caras.



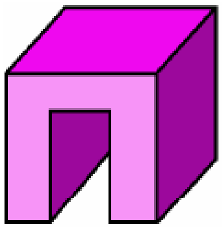
CLASES DE POLIEDROS:

convexo si todas sus caras se pueden apoyar en un plano



Poliedro convexo

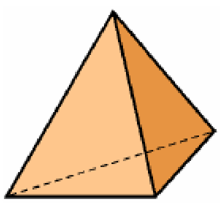
Cóncavo si no todas sus caras se pueden apoyar en un plano



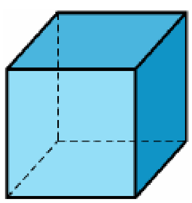
Poliedro cóncavo

POLIEDROS REGULARES:

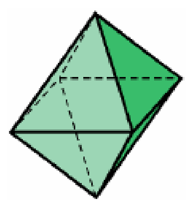
Los ***poliedros regulares*** son aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice concurren el mismo número de caras. Sólo existen cinco poliedros regulares.



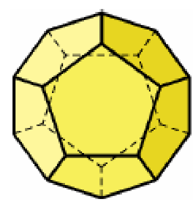
Tetraedro
4 caras
triángulos equiláteros



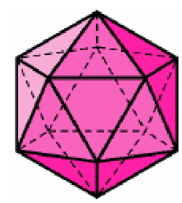
Hexaedro o cubo
6 caras
cuadrados



Octaedro
8 caras
triángulos equiláteros



Dodecaedro
12 caras
pentágonos

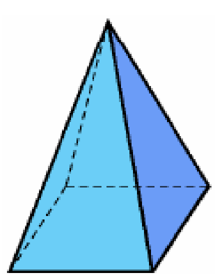


Icosaedro
20 caras
triángulos equiláteros

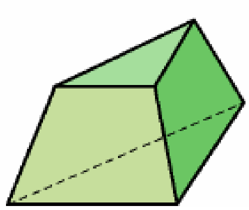
TEOREMA DE EULER

En cualquier poliedro convexo se verifica que el número de caras (*C*) más el número de vértices (*V*) es igual al número de aristas (*A*) más dos.

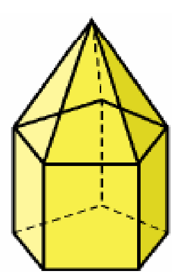
Nº de caras + Nº de vértices = Nº de aristas + 2 → ***C + V = A + 2***



Pirámide cuadrangular



Pirámide triangular truncada



Diamante

Poliedro	C (caras)	V (vértices)	A (aristas)	$C + V - A$
Pirámide cuadrangular	5	5	8	2
Pirámide triangular truncada	5	6	9	2
Diamante	11	11	20	2

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

TEOREMA DE EULER

Verificar el teorema de Euler y completar el siguiente cuadro:

NOMBRE	Cara	No. Caras	No. vértices	No. aristas	C + V - A
Hexaedro o cubo	Cuadrado				
Tetraedro	Triángulo				
Octaedro	Triángulo				
Dodecaedro	Pentágono				
Icosaedro	Triángulo				

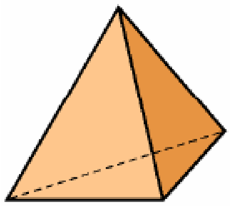
ÁREAS DE LOS POLIEDROS

El ***área de un poliedro*** se obtiene sumando las áreas de todas las caras que lo forman. Para las pirámides y prismas se pueden obtener fórmulas sencillas que permitan calcular el área.

ÁREAS DE POLIEDROS REGULARES

Hallar las áreas de los poliedros regulares en función de la arista *a*.

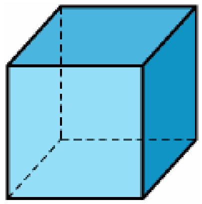
Tetraedro (1)



$$A = 4 \cdot A_{\text{cara}} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{A = a^2\sqrt{3}}$$

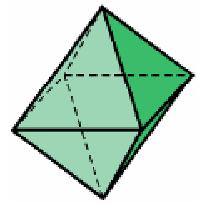
Hexaedro o cubo (2)



$$A = 6 \cdot A_{\text{cara}} = 6 \cdot a^2$$

$$\boxed{A = 6a^2}$$

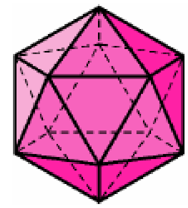
Octaedro (3)



$$A = 8 \cdot A_{\text{cara}} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{A = 2a^2\sqrt{3}}$$

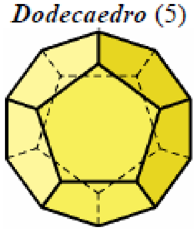
Icosaedro (4)



$$A = 20 \cdot A_{\text{cara}} = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{A = 5a^2\sqrt{3}}$$

Dodecaedro (5)



La fórmula que nos permite obtener el área de este poliedro es la siguiente:

$$\boxed{A = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}$$

EJEMPLOS

Calcular las áreas de los poliedros regulares de arista 5 cm.

Tetraedro: ***A* = a² $\sqrt{3}$ =** $5^2 \times\sqrt{3} = 25.\ \sqrt{3} = 43{,}30$ cm²

Hexaedro: ***A* = 6a² =** 6. 5^2= 150 cm²

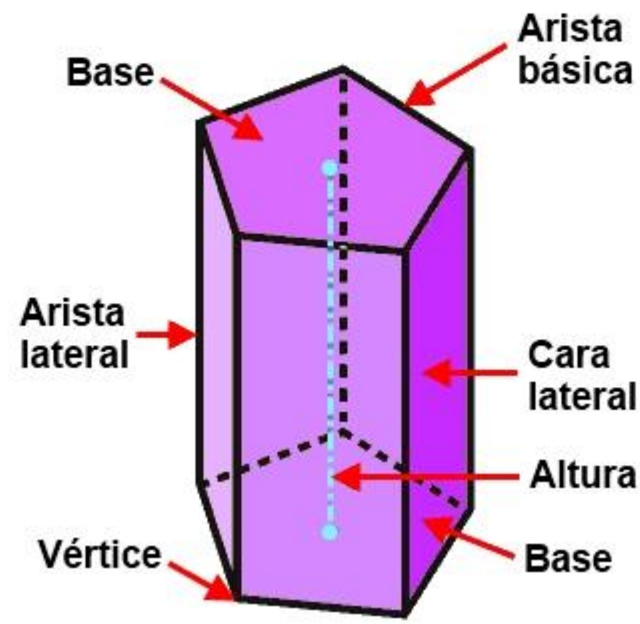
Octaedro: **A= 2. a² $\sqrt{3}$=** $2.5^2.\sqrt{3} = 2.25.\sqrt{3} = 50\sqrt{3} = 86{,}6$ cm²

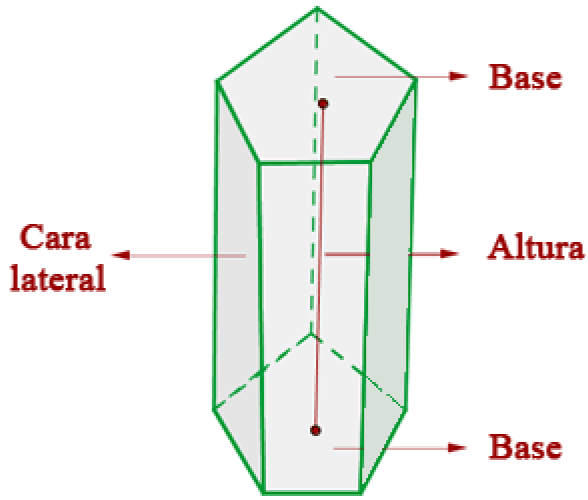
Icosaedro: **A= 5a² . $\sqrt{3}$ =** $5.5^2.\sqrt{3} = 5\ .\ 25.\ \sqrt{3} = 125\sqrt{3} = 216{,}5$ cm²

Dodecaedro: **A= $3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ =** $3.\ 5^2.\ \sqrt{25+10\sqrt{5}} = 3.\ 25.\ \sqrt{25+10\sqrt{5}} = 75.\ \sqrt{25+10\sqrt{5}}$ $= 75\ .\ 6{,}88 = 516\ \text{cm}^2$

PRISMAS

Los ***primas*** son poliedros cuyas bases, paralelas entre sí, son dos polígonos iguales y sus caras laterales son paralelogramos.

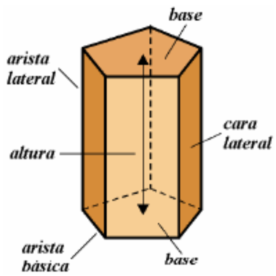




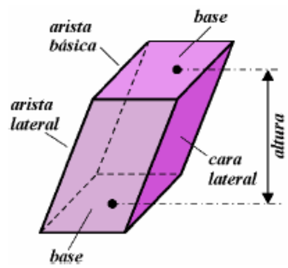
En un prisma se pueden diferenciar los siguientes elementos:

Bases (B): cada prisma tiene dos bases, siendo ambas iguales y paralelas.
Caras (C): son los paralelogramos de los laterales y las bases.
Altura (h): distancia entre las dos bases del prisma. En el caso del prisma recto la longitud de la altura h y la de las aristas de las caras laterales coinciden.
Vértices (V): puntos donde confluyen las caras del prisma.
Un elemento característico de los primas es la ***altura*** o segmento perpendicular a sus bases.
Los prismas se pueden clasificar de la siguiente manera:

· **Por los polígonos de sus bases** pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.
· **Rectos y oblicuos,** según que las aristas laterales sean perpendiculares u oblicuas a las bases.
· **Regulares o irregulares.** Son regulares aquellos prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares; y son
irregulares cuando falta alguna condición de regularidad.
· **Paralelepípedos** son prismas cuyas bases son paralelogramos, luego sus seis caras son paralelogramos. Los
paralelepípedos rectos se denominan ***ortoedros,*** y son el *ortoedro* (o *paralelepípedo rectángulo*) y el *cubo* (o
hexaedro).

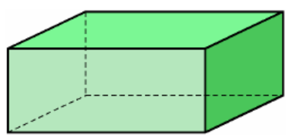


Prisma pentagonal recto (regular)
Base: pentágono regular

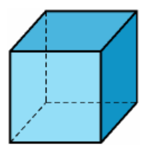


Prisma cuadrangular oblicuo (irregular)
Base: cuadrado

Paralelepípedos:



Ortoedro o paralelepípedo rectángulo
Todas sus caras son rectángulos



Cubo o hexaedro
Todas sus caras son cuadrados

PIRÁMIDES

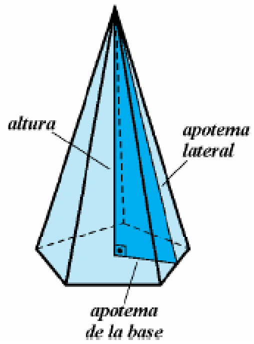
Son poliedros que tienen por base un polígono y sus caras laterales son triángulos que concurren en un ***vértice.***

Los elementos más característicos de la pirámide, además de los generales de los poliedros, son:

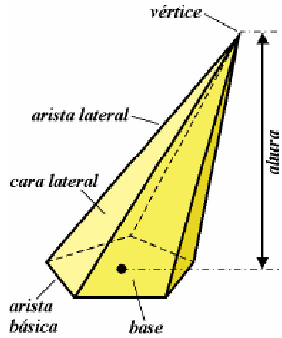
Altura, h**,** o distancia del vértice al plano que contiene la base.
Apotema lateral, al**,** es la altura de sus caras laterales.
Apotema de la base, ab**,** es la apotema de la base.

Podemos clasificar las pirámides de la siguiente manera:

· **Por los polígonos de sus bases** pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.
· **Rectas y oblicuas.** Las pirámides rectas son aquellas que tienen por caras laterales triángulos isósceles. Si alguna cara lateral es un triángulo escaleno, la pirámide es oblicua.
· **Regulares o irregulares.** Son regulares aquellas pirámides rectas que tienen por base un polígono regular; y son irregulares cuando falta alguna condición de regularidad.

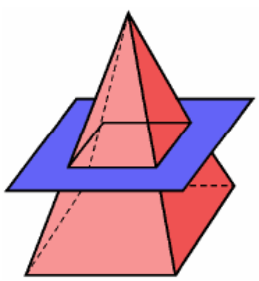


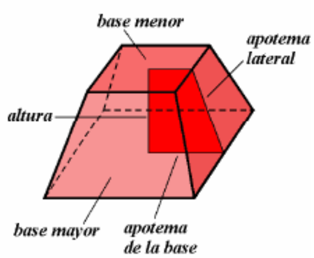
Pirámide pentagonal recta (regular)



Pirámide pentagonal oblicua (irregular)

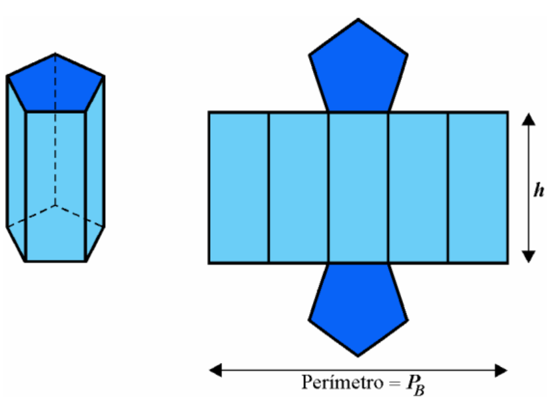
El ***tronco de pirámide*** es la parte de pirámide comprendida entre la base y la sección producida por un plano paralelo a la base. La altura del tronco es la distancia entre las bases y la apotema es la altura de una cara lateral (trapecio).





ÁREAS DE PRISMAS Y PIRÁMIDES RECTAS

El desarrollo de un ***prisma recto*** es un rectángulo (formado por las caras laterales) y los dos polígonos de las bases.
Uno de los lados del rectángulo es el perímetro del polígono de la base (*PB*) y el otro lado es la altura del prisma.



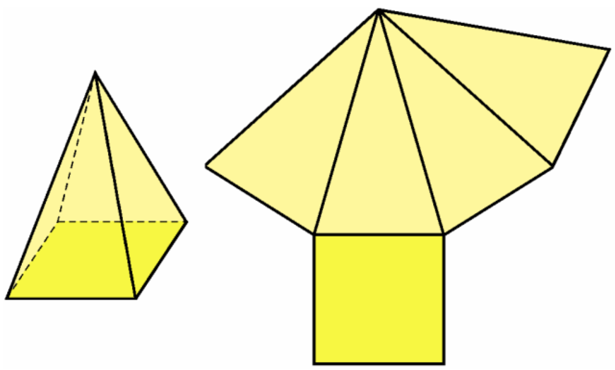
El área lateral es igual al perímetro de la base por la altura:

$A_L = P_B \times h$

El área total es igual al área lateral más el área de las dos bases:

$A_T = A_L + 2\times A_B$

El desarrollo de una ***pirámide recta*** lo forman varios triángulos isósceles (caras laterales) y el polígono de la base.



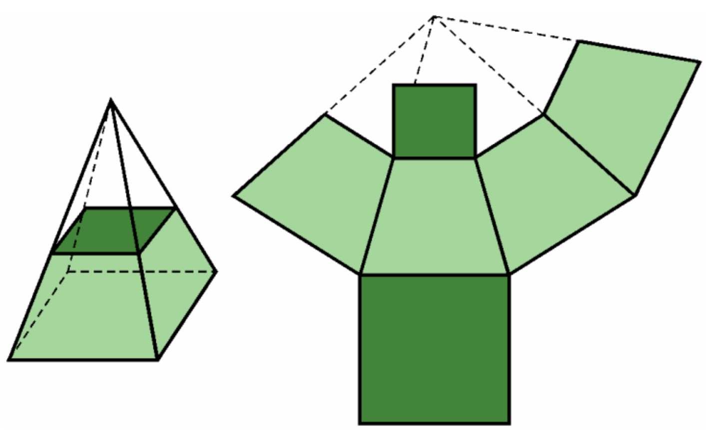
El área lateral se obtiene sumando el área de todas las caras laterales:

A_L = *suma de las áreas de las caras laterales*

El área total se obtiene sumando al área lateral el área de la base:

$A_T = A_L + A_B$

El desarrollo de un ***tronco de pirámide*** son varios trapecios y los dos polígonos que forman las bases. El área de una cara lateral es el área de un trapecio y el área lateral la suma de las áreas de todas las caras laterales.



El área lateral se obtiene sumando el área de todas las caras laterales:

AL = suma de las áreas de las caras laterales

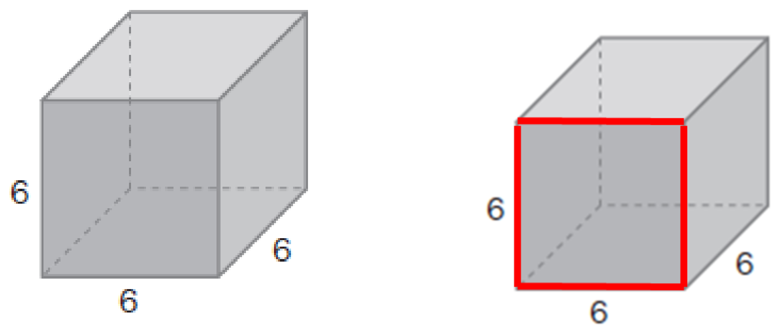
El área total es igual al área lateral más la suma de las áreas de la base mayor y de la base menor:

AT = AL + AB + Ab

EJEMPLOS:

- Calcula el área de los ortoedros cuyas longitudes vienen dadas en centímetros.

a)

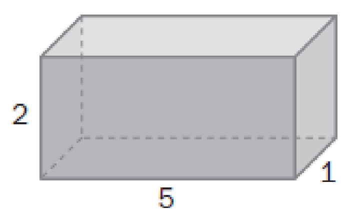


Solución:

Calculamos el área del cuadrado que forma las caras del ortoedro y multiplicamos por 6.

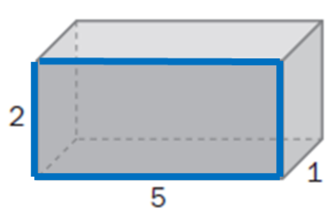
A= $6l^2 \rightarrow 6(6)^2 \rightarrow 6 \times 36 = 216cm^2$

b)



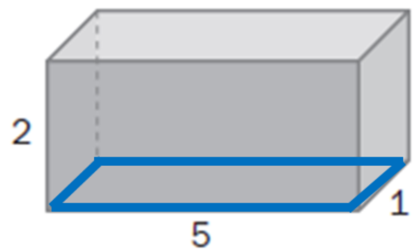
Solución:

1. Se calcula el área de los 2 rectángulos, cuyas medidas son 5 cm y 2 cm, el resultado del área de cada uno se multiplica por 2.



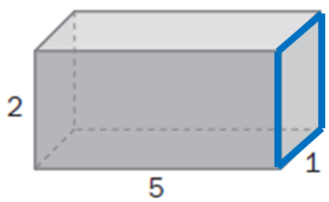
$A = b \times h \; \rightarrow A = 5cm \; \times 2\ cm \; \rightarrow A = 10\ cm^2 \; \rightarrow ATr = 2 \; \times 10\ cm^2 = \mathbf{20\ cm^2}$

2. Se calcula el área de los 2 rectángulos superior e inferior.



$A = b \times h \; \rightarrow A = 5cm \; \times 1\ cm \; \rightarrow A = 5\ cm^2 \; \rightarrow ATr = 2 \; \times 5\ cm^2 = \mathbf{10\ cm^2}$

3. Se calcula el área de los 2 rectángulos laterales:



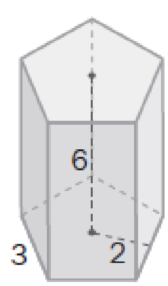
$A = b \times h \; \rightarrow A = 1cm \; \times 2\ cm \; \rightarrow A = 2\ cm^2 \; \rightarrow ATr = 2 \; \times 2\ cm^2 = \mathbf{4\ cm^2}$

4. Finalmente se suman las áreas de los cuadrados y de los rectángulos:

AT= 20cm^2 + 10 cm^2 + 4 cm^2 = **34 cm^2**

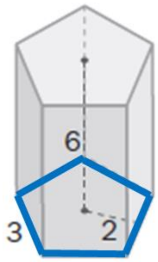
Calcula el área total de los siguientes prismas cuyas longitudes vienen dadas en centímetros.

a)



Solución:

1. Se calcula el área de las bases, las cuales corresponden a un pentágono regular, cuyo lado (arista) mide 3 cm y la apotema es igual a 2 cm

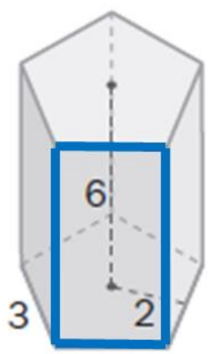


$$A = \frac{p \times a}{2} \rightarrow A = \frac{(5 \times 3cm) \times 2cm}{2} \rightarrow A = \frac{15cm \times 2cm}{2} \rightarrow A = \frac{30cm^2}{2} \rightarrow A = 15\ cm^2$$

Como son dos bases, el resultado anterior se multiplica por 2 para obtener el área total de las bases:

$$ATb = 2\ \times 15cm^2 = \mathbf{30\ cm^2}$$

2. Se calcula el área de las caras laterales (son rectángulos), cuyas medidas son 3cm de base y 6 cm de altura.



$$A = b \times h \rightarrow A = 3\ cm\ \times 6\ cm \rightarrow A = 18\ cm^2$$

Como son cinco caras laterales, el resultado anterior se multiplica por 5 para obtener el área total de las caras:

$$ATc = 5\ \times 18cm^2 = \mathbf{90\ cm^2}$$

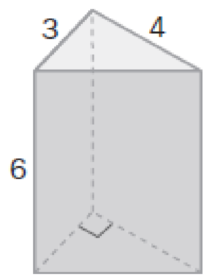
3. El área total del prisma se obtiene sumando el área de las bases con el área de las caras laterales.

AT= 30 cm^2 + 90 cm^2= 120 cm^2

* También se puede calcular el área total del prisma con la fórmula:

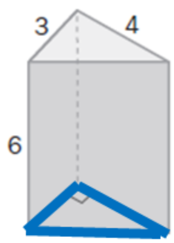
$$AT = p(a + h), donde\ p = perímetro, a = apotema, h = altura$$

$$AT = p(a + h) \rightarrow AT = 15cm\ (2cm + 6\ cm) \rightarrow AT = 15cm(8\ cm) \rightarrow AT = \mathbf{120\ cm^2}$$

b) 

Solución:

1. Se calcula el área de las bases, las cuales corresponden a un triángulo rectángulo cuyos catetos son 3cm y 4 cm.

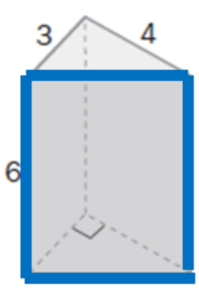


$$A = \frac{b \times h}{2} \rightarrow A = \frac{4\ cm \times 3cm}{2} \rightarrow A = \frac{12\ cm^2}{2} \rightarrow A = 6cm^2$$

Como son dos bases, el resultado anterior se multiplica por 2

$$ATb = 2\ (6\ cm^2) \rightarrow ATb = \mathbf{12\ cm^2}$$

2. Se calcula el área de las 3 caras laterales, que tienen forma de un rectángulo, como el prisma es irregular cada cara tiene diferente área.



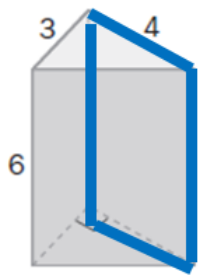
En este caso, sólo tenemos la medida de la altura, la base es la hipotenusa del triángulo rectángulo, que hasta el momento desconocemos su valor, para hallarlo debemos emplear teorema de Pitágoras.

$$b^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow b^2 = 9 + 16 \rightarrow b^2 = 25 \rightarrow b = \sqrt{25} \rightarrow b = 5\ cm$$

El área del rectángulo es:

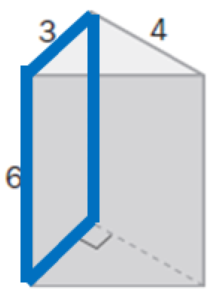
$A = b \times h \rightarrow A = 5cm \times 6\ cm \rightarrow A = \mathbf{30\ cm^2}$

Para hallar la segunda cara:



$A = b \times h \rightarrow A = 4cm \times 6\ cm \rightarrow A = \mathbf{24\ cm^2}$

Para hallar la tercera cara:



$A = b \times h \rightarrow A = 3cm \times 6\ cm \rightarrow A = \mathbf{18\ cm^2}$

Para hallar el área total de las caras laterales se suman los resultados anteriores:

$ATcl = 30\ cm^2 + 24\ cm^2 + 18\ cm^2 = \mathbf{72\ cm^2}$

3. Finalmente, para hallar el área total del prisma, se suman las áreas de las bases y de las caras laterales

$ATprisma = 12\ cm^2 + 72\ cm^2 \rightarrow ATp = \mathbf{84\ cm^2}$

* También se puede calcular el área total del prisma con la fórmula:

$A_{lateral} = p \times h, p = perímetro, h = altura$

$A_{lateral} = p \times h \rightarrow A_{lateral} = (3cm + 4\ cm + 5\ cm) \times 6cm \rightarrow A_{lateral} = 12\ cm \times 6\ cm \rightarrow$

$A_{lateral} = \mathbf{72\ cm^2}$

$A_{bases} = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3cm \times 4\ cm\right) \rightarrow 2(6\ cm^2) \rightarrow A_{bases} = \mathbf{12\ cm^2}$

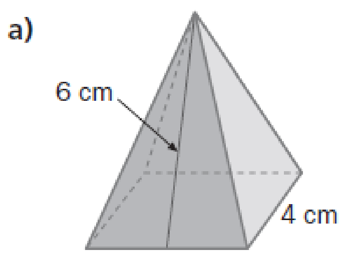
El area total es igual a 72 cm^2 + 12 cm^2= **84 cm^2**

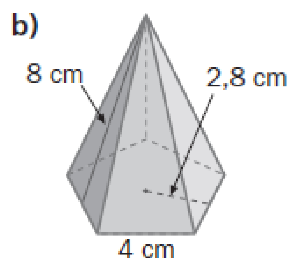
ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

ÁREA DE POLIEDROS

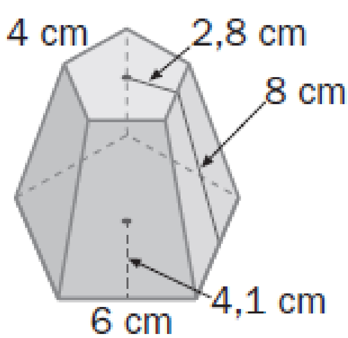
Resolver los siguientes ejercicios:

1. Calcular el área total de las siguientes pirámides:





2. Calcula el área de este tronco de pirámide:



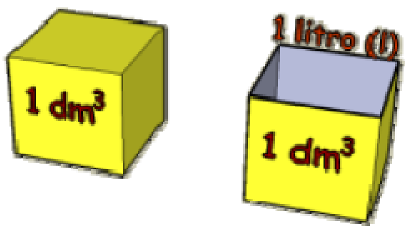
3. Calcular el área total de un prisma hexagonal regular cuya arista básica y altura miden ambas 8 cm.

4. Calcular el área lateral y el área total de una pirámide hexagonal regular de arista básica 6 cm y 4 cm de altura.

5. Determinar el área total de un tetraedro, un octaedro y un icosaedro de 5 cm de arista.

VOLUMEN

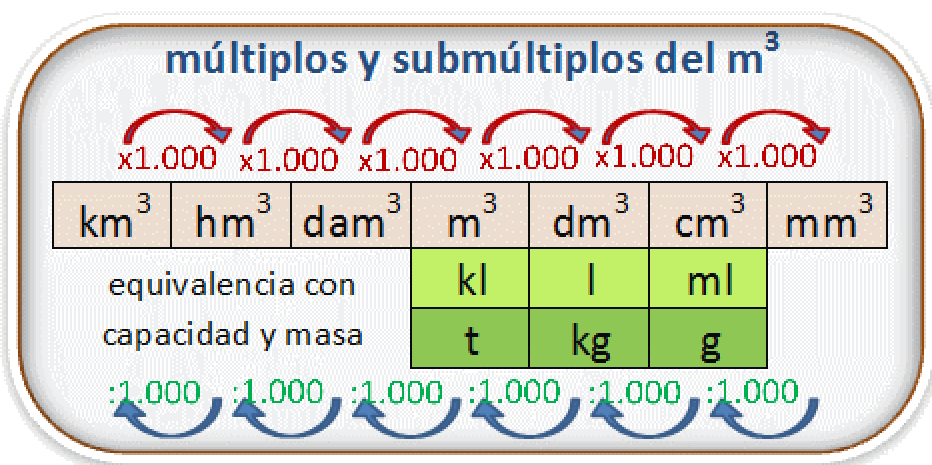
El **volumen de un cuerpo** es la magnitud física que expresa el espacio que ocupa un cuerpo en tres dimensiones (ancho, alto y largo). La unidad principal es el **metro cúbico (m^3).** El **volumen** es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo y **capacidad** es lo que cabe dentro de un recipiente.



Un **litro (l)** es la capacidad de una caja cúbica de 1 dm de lado.

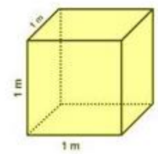
RELACIÓN ENTRE LAS UNIDADES DE VÓLUMEN

Cada unidad de volumen es 1000 veces mayor que la del orden inferior siguiente y 1000 veces menor que la del orden superior anterior.



Para pasar de una unidad a otra basta con observar cuántos niveles se suben o se bajan. Multiplicaremos por mil tantas veces como niveles se bajen y dividiremos entre mil tantas veces como niveles se suban. Por ejemplo: para pasar de hm^3 a m^3 hay que bajar dos niveles, lo que equivale a multiplicar por 1000 dos veces, que es igual que multiplicar por 1.000.000.

Unidades de volumen



Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico:

	Unidad	Símbolo	Equivalencia
Múltiplos	Kilómetro cúbico	Km ^{3}	1 Km ^{3} = 1 000 000 000 m ^{3}
Múltiplos	Hectómetro cúbico	hm ^{3}	1 hm ^{3} = 1 000 000 m ^{3}
Múltiplos	Decámetro cúbico	dam ^{3}	1 dam ^{3} = 1000 m ^{3}
	Metro cúbico	m ^{3}	1 m ^{3}
Submúltiplos	Decímetro cúbico	dm ^{3}	1 dm ^{3} = 0,001 m ^{3}
Submúltiplos	Centímetro cúbico	cm ^{3}	1 cm ^{3} = 0,000001 m ^{3}
Submúltiplos	Milímetro cúbico	mm ^{3}	1 mm ^{3} = 0,000000001 m ^{3}

Medidas de volumen	Medidas d capacidad
1 m³	1 000 litros
100 dm³	100 litros
10 dm³	10 litros
1 dm³	**1 litro**
100 cm³	1decilitro
10 cm³	1 centilitro
1 cm³	**1 mililitro**
1 mm³	0,1 mililitro

En general se llama capacidad de un recipiente a su volumen. Tanto las unidades de volumen, como los múltiplos y divisores del litro, se usan para medir volúmenes y capacidades.

EJEMPLOS DE CONVERSIÓN DE UNIDADES DE VOLUMEN

1. **Expresa en mm^3 4,3 m^3.**

Para pasar de m3 a mm3 hay que bajar 3 niveles. Por tanto, hay que multiplicar por 1000 tres veces, lo que equivale a multiplicar por 1.000.000.000:

4,3 m^3 = 4,3 · 1.000.000.000 mm^3= **4.300.000.000 mm^3**

2. **Expresa en dam^3 2,4 m^3.**

Para pasar de m^3 a dam^3 hay que subir 1 nivel. Por tanto, hay que dividir entre 1000:

2,4 m^3 = 2,4 : 1000 dam^3 = **0,0024 dam^3**

3. **¿Cuántos mm^3 son 4,9 dm^3?**

Para pasar de dm^3 a mm^3 hay que bajar 2 niveles. Por tanto, hay que multiplicar por 1000 dos veces, lo que equivale a multiplicar por 1.000.000:

4,9 dm^3 = 4,9 · 1.000.000 mm^3= **4.900.000 mm^3**

4. **Pasar 1.36 hm^3 a m^3:**

Tenemos que multiplicar (porque el hm^3 es mayor que el m^3) por la unidad seguida de seis ceros, ya que hay dos lugares entre ambos.

1.36 · 1 000 000 = **1 360 000m^3**

5. **Pasar 15.000 mm^3 a cm^3:**

Tenemos que dividir (porque el mm^3 es menor que el cm^3) por la unidad seguida de tres ceros, ya que hay un lugar entre ambos.

15 000 ÷ 1 000 = **15 cm^3**

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

UNIDADES DE VOLUMEN

1. Transformar en metros cúbicos:

a) 450 dam^3

b) 0,084 hm^3

c) 0,11 km^3

d) 35840 dm^3

e) 30000 l

f) 0,025 hm^3

g) 0,015 km^3

h) 45214 dm^3

i) 23 dam^3

j) 58000 l

2. Transformar en litros los siguientes volúmenes:

a) 0,87 hl

b) 0,000094hm^3

c) 300000 mm^3

d) 11 dam^3 350 m^3

e) 400000 hm^3

f) 0,32 hl

g) 0,000047 hm^3

h) 6 dam^3 318 m^3

3. Completa las siguientes igualdades:

a) 0,0013 hm^3= ____ dm^3

b) 0,11 dam^3 = ____ cm^3

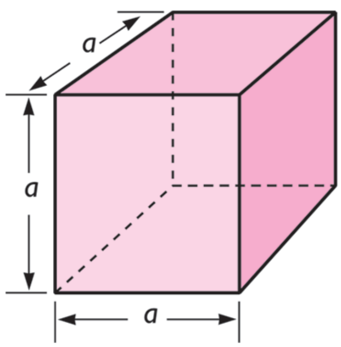
c) 3 dam^3 11 m^3 743 dm^3=________________________________ m^3

d) 3 dam^3 11 m^3 743 dm^3= _______________________________ l

VOLÚMENES DE PRISMAS Y PIRÁMIDES

CUBO

Un **cubo** es un prisma particular formado por seis caras cuadradas. Su volumen es el cubo de la longitud de la arista.



$$V_c = a^3$$

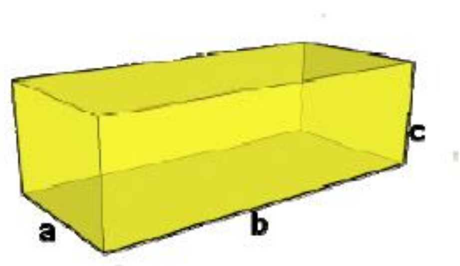
Ejemplo:

Calcular el volumen de un cubo de 3 cm de arista.

V=a³→ $V = (3cm)^3 \rightarrow V = 27\ cm^3$

Ortoedro

Un **ortoedro** es un prisma cuyas caras son todas rectangulares.



Volumen (V)= a · b · c

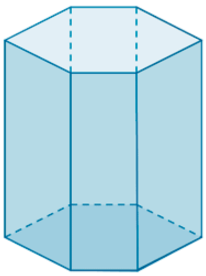
Ejemplo:

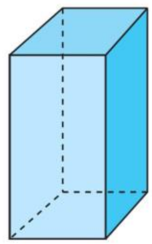
Calcular el volumen de un ortoedro cuyas medidas cuyo ancho y altura miden 3 cm y tiene un largo de 5 cm.

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \rightarrow V = 3\ cm \times 5\ cm \times 3\ cm = \mathbf{45\ cm^3}$$

PRISMA RECTO

Un **prisma recto** es un poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas, llamadas bases y cuyas caras laterales son rectangulares.





Volumen (V)= B · h

B=área de la base h=altura

Ejemplo:

Determinar el volumen de un prisma recto de base hexagonal cuya arista de la base mide 16 cm y su altura 30 cm

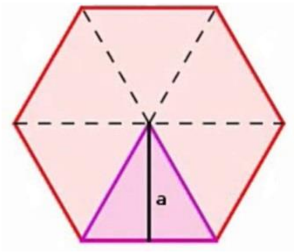
Solución:

1. Hallaremos el área de la base, la cual es un hexágono:

Existen diferentes métodos para obtener el área del hexágono regular:

Método 1:

El hexágono se puede dividir en 6 triángulos equiláteros, después hallamos el área de cada triángulo y después se multiplica por 6:



La fórmula para hallar el área es $A = \frac{b \times h}{2}$

b= base (16 cm)

h(a)= altura.

Para hallar la altura (que corresponde a la apotema del triángulo) se emplea teorema de Pitágoras.

$$a = \sqrt{(16\ cm)^2 - (8\ cm)^2}$$

$$a = \sqrt{256\ cm^2 - 64\ cm^2}$$

$$a = \sqrt{192\ cm^2}$$

$$a = 8\sqrt{3}\ cm$$

Se calcula el área del triángulo:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$A = \frac{16\ cm \times 8\sqrt{3}\ cm}{2} = 64\sqrt{3}\ cm^2$$

Para hallar el área total de la base, multiplicamos el valor anterior por 6:

$$6\left(64\sqrt{3}\ cm\right) = 384\sqrt{3} cm^2$$

Para calcular el volumen multiplicamos el área de la base por la altura:

$$V = A_b \times h$$

$$V = 384\sqrt{3} cm^2 \times 30\ cm = \mathbf{11520\sqrt{3}\ cm^3}$$

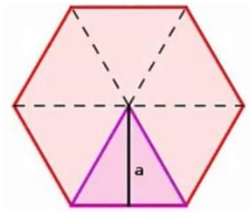
Método 1:

La fórmula para hallar el área de un hexágono regular es $A = \frac{p \times a}{2}$,

$p = perímetro,\ a = apotema$

Perímetro= 6 lados x 16 cm =96 cm

Apotema= la apotema es la altura de cada uno de los triángulos en que se descompone el hexágono.



Para hallar la apotema haremos uso del teorema de Pitágoras, dándole un valor de 16 cm a la hipotenusa y al cateto (que es la mitad del valor del lado), le corresponde 8 cm.

$$a = \sqrt{(16\,cm)^2 - (8\,cm)^2}$$

$$a = \sqrt{256\,cm^2 - 64\,cm^2}$$

$$a = \sqrt{192\,cm^2}$$

$$a = 8\sqrt{3}\,cm$$

Se calcula el área del hexágono:

$$A = \frac{p \times a}{2}$$

$$A = \frac{96\,cm \times 8\sqrt{3}\,cm}{2}$$

$$A = 384\sqrt{3}\,cm$$

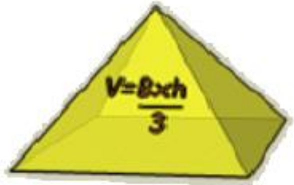
Para calcular el volumen multiplicamos el área de la base por la altura:

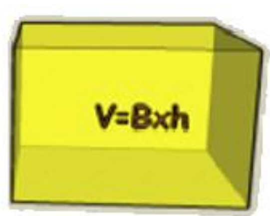
$$V = A_b \times h$$

$$V = 384\sqrt{3}cm^2 \times 30\,cm = \mathbf{11520\sqrt{3}\,cm^3}$$

PIRÁMIDE

El **volumen de una pirámide** es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma base que dicha pirámide y la misma altura que ésta.





Volumen (V)= (B · h)/3

B=área de la base **h=**altura

Ejemplo:

Calcular el volumen de una pirámide de base cuadrada regular cuyos lados de la base miden 10 cm, la altura de la pirámide es de 18 cm.

Solución:

Se calcula el área de la base, en este caso es un cuadrado de 10 cm de lado:

A= L^2 → A= $(10\ cm)^2$ → A= $100\ cm^2$

V= (área de la base × altura)/ 3 → **V= (B · h)/3** →

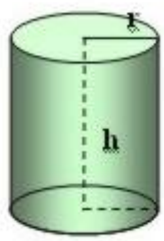
V= $\frac{100\ cm^2 \times 18\ cm}{3} = \frac{1800\ cm^3}{3} = \mathbf{600\ cm^3}$

ÁREA Y VOLUMEN DE POLIEDROS

Nombre	Área	Volumen
Tetraedro	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$
Hexaedro	$6a^2$	a^3
Octaedro	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$
Dodecaedro	$15a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$
Icosaedro	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$

Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

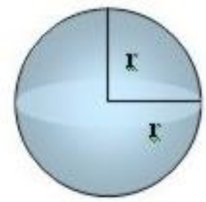
Cilindro



Área $A_{total} = 2\pi r(h + r)$

Volumen $V = \pi r^2 \cdot h$

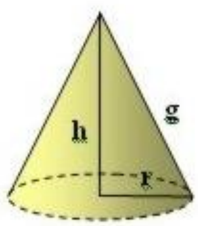
Esfera



Área $A_{total} = 4\pi r^2$

Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

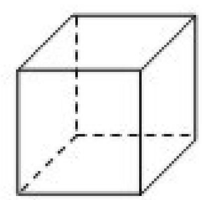
Cono



Área $A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$

Volumen $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

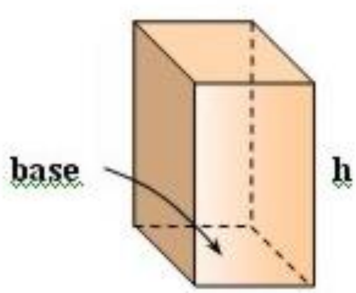
Cubo



Área $A = 6\ a^2$

Volumen $V = a^3$

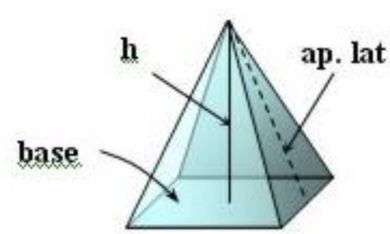
Prisma



Área $A = (\text{perim. base} \cdot h) + 2 \cdot \text{area base}$

Volumen $V = \text{área base} \cdot h$

Pirámide

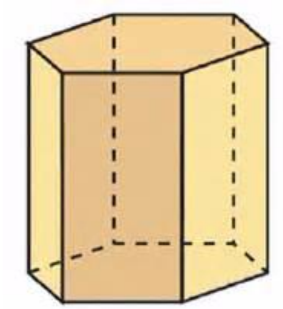


Área $A = \frac{\text{perim. base} \times \text{ap. lat}}{2} + \text{area base}$

Volumen $V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$

EJEMPLOS RESUELTOS:

- La base de este prisma es un polígono regular de lado 1,7 cm y apotema 1,5 cm. Calcula su volumen sabiendo que su altura es 3,9 cm.



Solución:

1. Se calcula el área de la base (hexágono):

$$A = \frac{p \times a}{2} \rightarrow A = \frac{10{,}2\ cm \times 1{,}5\ cm}{2} \rightarrow A = \frac{15{,}3\ cm^2}{2} \rightarrow A = 7{,}65\ cm^2$$

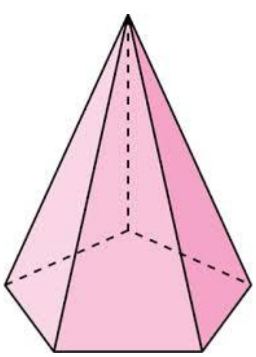
Perímetro= 6 x 1,7 cm= 10,2 cm

2. Se calcula el volumen

$$V = A_b \times h$$

$$V = 7{,}65\ cm^2 \times 3{,}9\ cm = \mathbf{29{,}835\ cm^3}$$

- La base de esta pirámide es un pentágono regular de lado 1,3 cm y apotema 0,9 cm. Calcula su volumen sabiendo que su altura es 2,7 cm.



Solución:

1. Se calcula el área de la base (pentágono):

$$A = \frac{p \times a}{2} \rightarrow A = \frac{6{,}5\ cm \times 0{,}9\ cm}{2} \rightarrow A = \frac{5{,}85\ cm^2}{2} \rightarrow A = 2{,}925\ cm^2$$

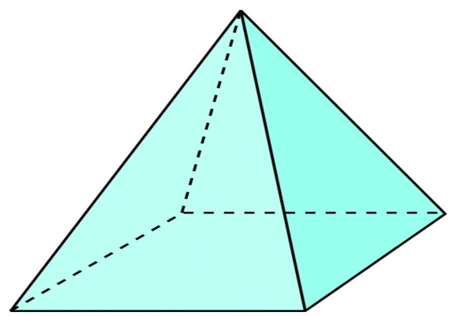
Perímetro= 5 x 1,3 cm= 6,5 cm

2. Se calcula el volumen

V= (B · h)/3

V= $\frac{2{,}925\ cm^2\ x\ 2{,}7\ cm}{3} \rightarrow V = \frac{7{,}8975\ cm^3}{3} \rightarrow \boldsymbol{V = 2{,}6325\ cm^3}$

- La Gran Pirámide de Giza es la única que perdura de las *siete maravillas del mundo antiguo*. Actualmente tiene una altura de 137 m y la base es un cuadrado de 230 m de lado. ¿Cuál es su volumen aproximado?



Solución:

1. Se calcula el área de la base (cuadrado):

$$A = l^2 \rightarrow A = (230\ m)^2 \rightarrow A = 52900\ cm^2$$

2. Se calcula el volumen

V= (B · h)/3

V= $\frac{52.900\ m^2\ x\ 137\ m}{3} \rightarrow V = \frac{7.247.300 m^3}{3} \rightarrow \boldsymbol{V = 2.415.767\ m^3}$

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

VOLUMEN

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Un prisma recto tiene como base un pentágono de lado 12 dm; tiene la altura de 18 dm. Determinar la superficie lateral, el área total de la superficie y el volumen del prisma.

2. Un prisma hexagonal regular 15 cm de alto, tiene el perímetro de la base de 180 cm. Calcular el área de la superficie total y el volumen.

3. Un prisma pentagonal regular de 15 cm de alto, tiene el perímetro de la base de 180 cm. Calcular el área de la superficie total y el volumen.

4. Un prisma octogonal regular de 15 cm de alto, tiene el perímetro de la base de 240 cm. Calcular el área de la superficie total y el volumen.

5. Un prisma decagonal normal 15 cm de alto, tiene el perímetro de la base de 180 cm. Calcular el área de la superficie total y el volumen.

6. Un prisma hexagonal regular 15 cm de alto, tiene el perímetro de la base de 180 cm. Calcular el área de la superficie total y el volumen.

7. Un prisma dodecagonal normal 15 cm de alto, tiene el perímetro de la base de 180 cm. Calcular el área de la superficie total y el volumen.

8. Calcula la altura de un prisma pentagonal regular, sabiendo que el área total del sólido es 1094 cm y que el perímetro de la base es de 50 cm.

9. Un prisma recto tiene la base de un triángulo rectángulo con los catetos de 18 cm y 24 cm. Sabiendo que es alto 40 cm determina el área lateral, el área total y el volumen del prisma.

10. Un prisma recto tiene para su base de un triángulo rectángulo que tiene un cateto de 24 cm y la hipotenusa de 30 cm. Sabiendo que su altura es de 60 cm, calcula el área lateral, el área total y el volumen del prisma.

11. La base de un prisma es un triángulo rectángulo que tiene la suma de las medidas de las patas de 42 cm y un cateto 3/4 de la otra. Sabiendo que la altura del prisma es 5/3 de la hipotenusa de la base del triángulo, calcula el área total del sólido y el volumen.

12. Un prisma recto de base cuadrada, tiene el área lateral de 1.200 metros cuadrados y una altura de 30 metros. Determinar el volumen y área total del prisma.

13. El área de la superficie total de un cubo con el borde de 27 cm es equivalente a un lado de un primer triángulo regular que tiene una altura igual a 5/3 del arista de cubo. Calcular el área total del prisma y el volumen.

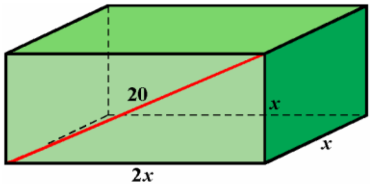
14. Un prisma recto tiene la base de un triángulo rectángulo, que tiene el área de $216\ cm^2$ y la medida de un cateto es 18 cm. Sabiendo que su altura es de 5/3 de la hipotenusa de la base del triángulo, calcula el área de la superficie total y el volumen del prisma.

15. Calcular el volumen de una pirámide cuadrangular de 10 cm de arista y 12 cm de altura.

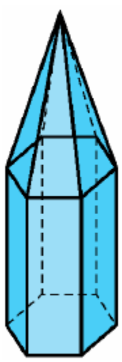
ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

ÁREA Y VOLUMEN

1. Una caja de galletas con forma de paralelepípedo mide lo mismo de largo que de alto y su ancho es doble que el largo. Si la diagonal de una de sus caras más grandes mide 20 cm, encuentra la cantidad de cartón necesaria para su construcción.



2. La siguiente figura representa la torre de la iglesia de un pueblo. Sus dimensiones son las siguientes: la longitud de la arista básica del prisma hexagonal regular es de 6 m, la de su altura es de 9’7 m y la de la arista lateral de la pirámide hexagonal regular es de 13 m. Con estos datos, halla la superficie externa de la torre.



3. Calcular el área y volumen de un cubo de arista 2m.

4. Calcular el área y el volumen de un ortoedro cuyas aristas miden 10 cm, 7cm y 4 cm.

5. Calcular el área y el volumen de un prisma recto de altura 3 m y que tiene por base un triángulo equilátero de 2 m de arista.

6. Calcula el área y el volumen de un prisma cuadrangular el el que su la arista de la base mide 4 dm y su altura es de 11 dm.

7. Calcula el área y el volumen de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 14 m y su altura es de 27 m.

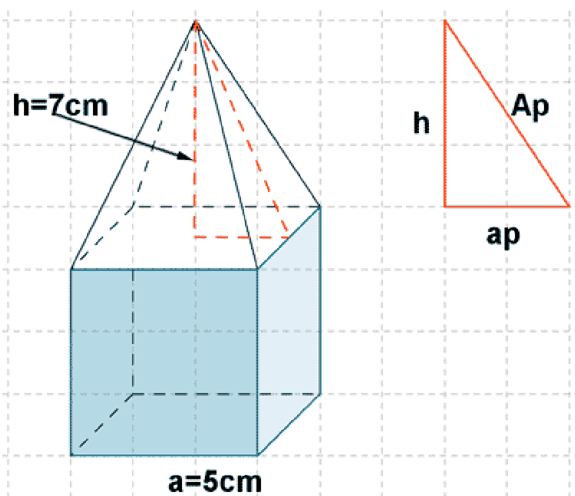
8. Calcular el área y el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene 4 cm de arista y una altura de 6 cm.

9. Hallar el área y el volumen de una piramide hexagonal en la que la arista de la base mide 3 cm y la arista lateral 5 cm.

10. Determinar el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones del largo, ancho y altura son 20 cm, 15 cm y 10 cm respectivamente.

11. Determinar el área total de un ortoedro cuyas dimensiones del largo, ancho y altura son 16 cm, 12 cm y 8 cm respectivamente.

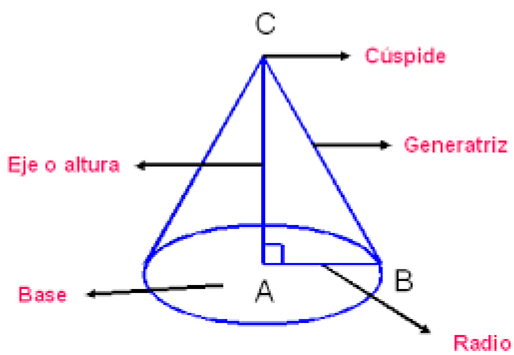
12. Calcular el volumen de la siguiente figura.

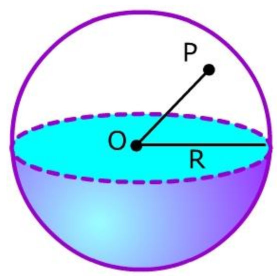


CUERPOS REDONDOS:

Los cuerpos redondos de revolución se obtienen al girar una figura plana alrededor de un eje. Los tres cuerpos de revolución más sencillos son el *cilindro*, el *cono* y la *esfera*.

Los distintos cuerpos redondos cuentan con especificaciones que los caracterizan de los demás cuerpos geométricos, algunas de estas especificaciones son las siguientes:

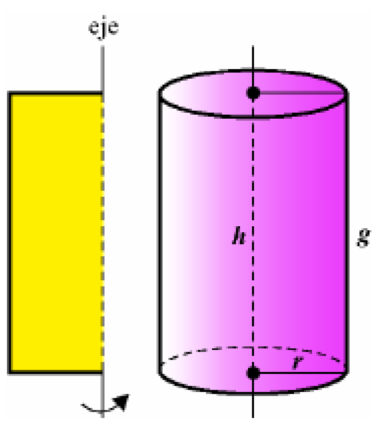




- Una de sus características principales es que una de sus caras o superficies son de forma circular u ovalada.
- Cuentan con una línea que gira alrededor de un eje , la cual recibe el nombre de **generatriz**
- Los puntos que en la generatriz se describen forman una circunferencia.
- Los cuerpos redondos no están limitados por un polígono.

CILINDRO:

El ***cilindro*** es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.



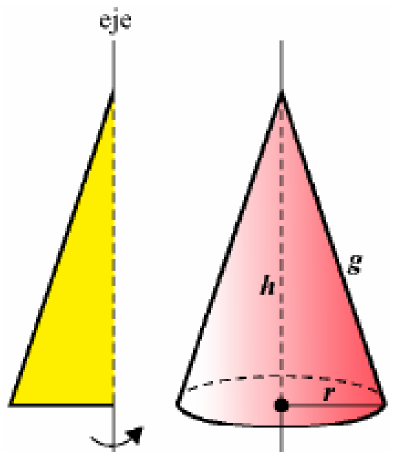
Altura **(*h*)** es el segmento que une el centro de las dos bases. Es perpendicular a ambas bases.

· ***Radio*** **(*r*)** es el radio de cada uno de los círculos que forman sus bases.

· ***Generatriz*** **(*g*)** es el segmento que genera el cilindro. Su medida coincide con la de la altura.

CONO

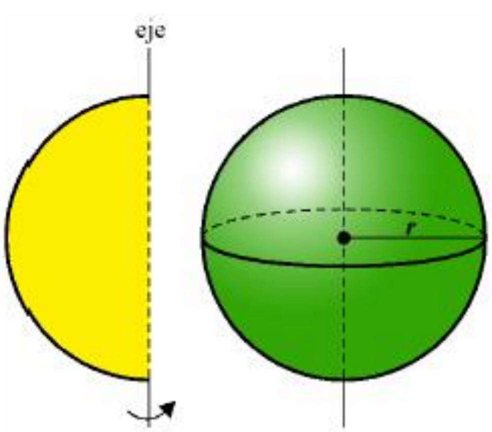
El ***cono*** es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.



Altura **(*h*)** es el segmento que une el vértice y el centro de la base. Es perpendicular a la base.
Radio **(*r*)** es el radio del círculo que forma su base.
Generatriz **(*g*)** es el segmento que genera el cono.

ESFERA

La ***esfera*** es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro.

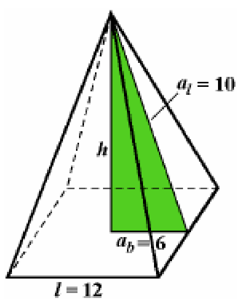
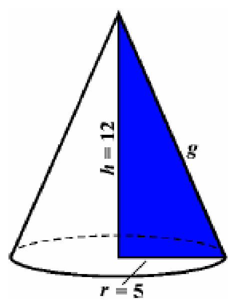
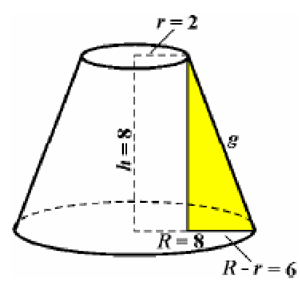
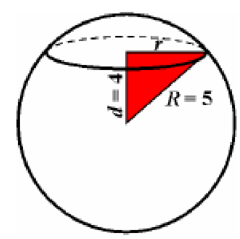


Radio **(*r*)** es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la superficie que limita la esfera.
Diámetro **(*d*)** es el segmento que une dos puntos de la superficie esférica pasando por el centro.

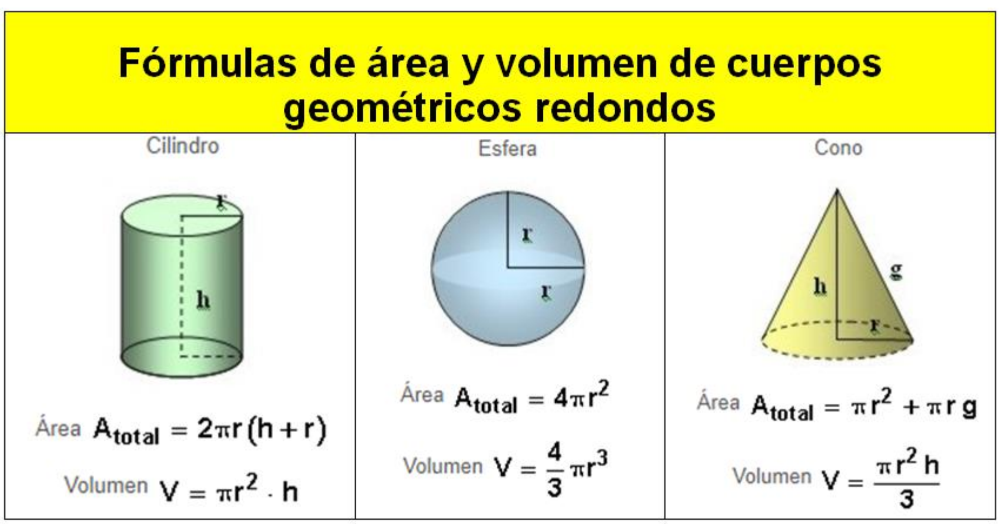
RELACIONES MÉTRICAS EN PIRÁMIDES, CONOS Y ESFERAS

El teorema de Pitágoras permite relacionar la altura (*h*) de la pirámide con la apotema lateral (*al*) y con la apotema de la base (*ab*). También relacionamos por este teorema los elementos de los conos: altura (*h*), radio (*r*) y generatriz (*g*).

En las siguientes figuras se calcula un lado de un triángulo rectángulo en pirámides, conos, troncos de cono y en esferas, cuando se conocen los otros dos lados del triángulo (unidades en centímetros).

Cálculo de *h*	Cálculo de *g*	Cálculo de *g*	Cálculo de *r*
			
$a_l^2 = h^2 + a_b^2$	$g^2 = r^2 + h^2$	$g^2 = (R-r)^2 + h^2$	$R^2 = d^2 + r^2$
$h = \sqrt{a_l^2 - a_b^2}$	$g = \sqrt{r^2 + h^2}$	$g = \sqrt{(R-r)^2 + h^2}$	$r = \sqrt{R^2 - d^2}$
$h = \sqrt{100 - 36} = 8$	$g = \sqrt{25 + 144} = 13$	$g = \sqrt{36 + 64} = 10$	$r = \sqrt{25 - 16} = 3$

ÁREA Y VOLUMEN DE CUERPOS REDONDOS



EJEMPLOS RESUELTOS:

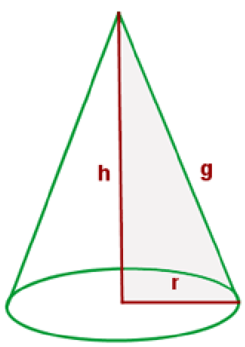
- Se echan 7 cm³ de agua en un recipiente cilíndrico de 1,3 cm de radio. ¿Qué altura alcanzará el agua?

Solución:

La figura es un cilindro, la fórmula de volumen es: $V = \pi . r^2 . h$, despejando h se obtiene:

$$h = \frac{V}{\pi . r^2} \rightarrow h = \frac{7\ cm^3}{3{,}14\ .\ (1{,}3\ cm)^2} \rightarrow h = \frac{7\ cm^3}{3{,}14\ .\ 1{,}69\ cm^2} \rightarrow h = \frac{7\ cm^3}{5{,}3066\ cm^2} \rightarrow \boldsymbol{h = \approx 1{,}32\ cm}$$

- Calcular el volumen de un cono cuya altura mide 4 cm y el radio de la base es de 3 cm.



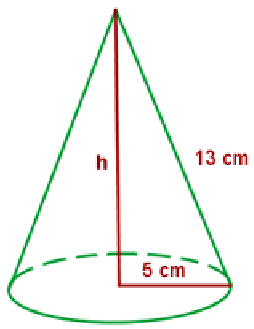
Solución:

La fórmula para calcular el volumen del cono es: $V = \frac{\pi . r^2 . h}{3}$, reemplazando obtenemos:

$$V = \frac{3{,}14 * \ (3cm)^2 * 4cm}{3} \rightarrow V = \frac{3{,}15 * \ 9\ cm^2 * 4\ cm}{3} \rightarrow V = \frac{113{,}4\ cm^3}{3} \rightarrow$$

$$V = \boldsymbol{37{,}8\ cm^3}$$

- Calcular el volumen de un cono cuya generatriz mide 13 cm y el radio de la base es de 5 cm.



Solución:

Para hallar el volumen necesitamos altura, con los datos que se tienen se puede calcular la altura a través de la generatriz y el radio. La generatriz se obtiene haciendo uso de la siguiente fórmula:

$g^2 = h^2 + r^2$, donde g= generatriz, h= altura, r= radio

Despejando h, se obtiene:

$$h^2 = g^2 - r^2 \to h^2 = (13\ cm)^2 - (5\ cm)^2 \to h^2 = 169\ cm^2 - 25\ cm^2 \to h^2 = 144\ cm^2$$

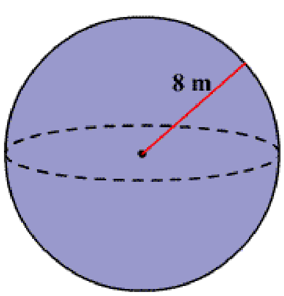
$$h = \sqrt{144\ cm^2} \to h = \mathbf{12\ cm}$$

Reemplazando en la fórmula de volumen se obtiene:

$$V = \frac{\pi . r^2 . h}{3} \to V = \frac{3{,}14 * (5cm)^2 * 12\ cm}{3} \to V = \frac{3{,}14 * 25\ cm^2 * 12\ cm}{3} \to V = \frac{942\ cm^3}{3} \to$$

$$V = \mathbf{314\ cm^3}$$

- Calcular el volumen de la esfera cuyo radio es 8 metros.



<u>Solución:</u>

Para hallar el volumen empleamos la fórmula: $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$

Reemplazando obtenemos:

$$V = \frac{4}{3}.3{,}14.(8\ m)^3 \rightarrow V = \frac{4}{3} * 3{,}14 * 512m^3 \rightarrow V = \frac{4 * 3{,}14 * 512m^3}{3} \rightarrow$$

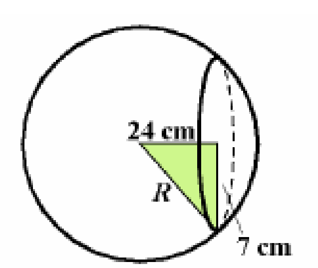
$$V = \frac{6430.72m^3}{3} \rightarrow \mathbf{V = 2143{,}6\ m^3}$$

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

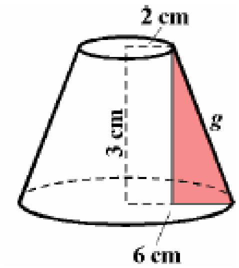
VOLUMEN DE CUERPOS REDONDOS

1. Calcular el volumen de un cilindro de radio 6 cm y altura 6 cm, de un cono de radio 6 cm y altura 6 cm

2. En el siguiente cuerpo geométrico, calcular el radio de la esfera.



3. En el siguiente cuerpo geométrico calcular la generatriz del tronco de cono.



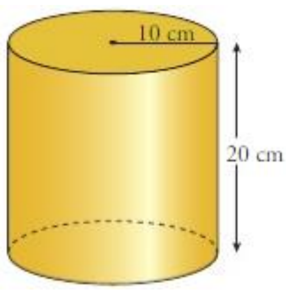
4. Hallar la generatriz de un cono, sabiendo que su altura es de 8 cm y que la longitud de la base es de 18,84 cm.

5. El diámetro de un cono mide 12 cm y la altura 8 cm. Calcular su área total.

6. Un cilindro tiene por altura la misma longitud que la circunferencia de la base. Y la altura mide 125.66 cm. Calcular:

A) El área total B) El volumen

7. Hallar el volumen del siguiente cilindro

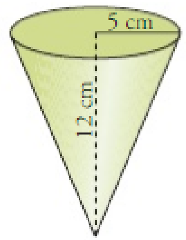


8. Hallar el volumen de una esfera de 12 cm de diámetro.

9. Hallar el volumen de un cono de 6 dm de radio de la base y 15 cm de altura.

10. Hallar el volumen de la siguiente figura:

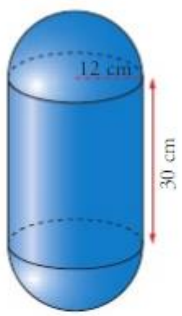
11. Hallar el volumen de la siguiente figura:



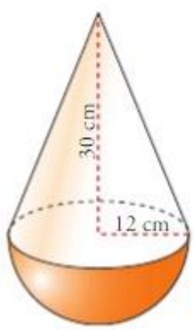
12. Hallar el volumen de un cilindro de 10 dm de radio de la base y 20 dm de altura.

13. Hallar el volumen de una esfera de 25 cm de radio.

14. Teniendo en cuenta las medidas señaladas, hallar el volumen de la siguiente figura:



15. Hallar el volumen de la siguiente figura:



TOMADO Y ADAPTADO DE:

https://www.vitutor.com/di/m/a_7.html

https://es.scribd.com/doc/44085650/Matematicas-Resueltos-Soluciones-Medidas-del-Volumen-2%C2%BA-ESO

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_volumen_cuerpos_geometricos/2esoquincena10.pdf

https://es.slideshare.net/EdwinAcua/reasyvolmenesdecuerposgeomtricos

http://calculo.cc/temas/temas_trigonometria/trian_semejante/problemas/p_area_vol_1.html

https://www.ditutor.com/geometria_espacio/volumen_cono.html