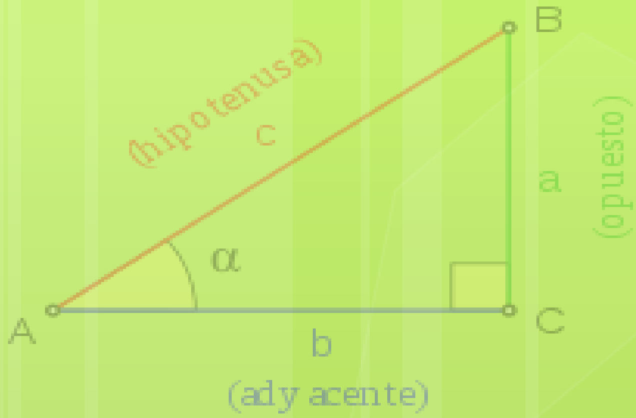


TRIGONOMETRÍA BÁSICA

Diseñado por:
Esp. María Cristina Marín Valdés

Área de Matemáticas
I.E. Eduardo Fernández Botero
Amalfi (Ant)
2017

Contenido

CONTENIDO

Contenido

DEDICATORIA

El presente trabajo es dedicado a la comunidad educativa de la Institución Eduardo Fernández Botero, pero en especial lo dedico a la persona que me inspiró para la producción de este texto, a la estudiante ***Luisa Fernanda Rendón Torres****, para quien nuestras diferencias comunicativas no fueron barrera para introducirse al maravilloso mundo de los números, permitiéndome vencer mis propios temores frente a las capacidades diferentes y demostrando que mientras haya educación hay esperanza.*

INTRODUCCIÓN

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es 'la medición de los triángulos'. Es la parte de la matemática que establece la relación entre los ángulos y los lados de un triángulo, siendo fundamental esta relación para la resolución de problemas relacionados al cálculo de las magnitudes y medidas de lados y ángulos de triángulos semejantes y también de polígonos, ya que todos los polígonos se pueden dividir en un número determinado de triángulos, por ser el triángulo polígono de menor número de lados.

Las relaciones establecidas entre estos elementos del triángulo determinan las 6 razones trigonométricas que básicamente se obtienen de un triángulo rectángulo, sin que esto signifique que no pueda aplicarse a cualquier tipo de triángulo o polígono.

En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Posee numerosas aplicaciones, entre las que se encuentran: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas global de navegación por satélites. (www.es.wikipedia.org)

la trigonometría es de mucha utilidad en la ingeniería civil, para el cálculo preciso de distancias, ángulos de inclinación o de peralte en una carretera y en arquitectura permite calcular las distancias y las fuerzas relacionadas con elementos de la diagonal

Apreciado estudiante este módulo es un compendio de conceptos básicos como son: los sistemas de medición de ángulos, el concepto de triángulo rectángulo y la aplicación de diferentes teoremas para su solución, las razones trigonométricas, los triángulos oblicuángulos, las identidades trigonométricas y ecuaciones trigonométricas. Cada uno de ellos con sus diferentes componentes que permite adquirir una noción amplia del concepto.

La metodología empleada es una conceptualización narrativa explicativa, que posibilita al estudiante una clara comprensión de los conceptos estudiados, además de permitirle dosificar su nivel de apropiación y un avance gradual de acuerdo a su ritmo de aprendizaje, favoreciendo el trabajo en equipo y la autonomía. Posee más de 200 ejercicios entre ejemplos y actividades de profundización que favorecen la realimentación continua de cada una de las temáticas.

ESQUEMA DE UNIDAD

TEMÁTICAS BÁSICAS

- Sistemas de medición de ángulos.
- Triángulos rectángulos y teoremas.
- Razones trigonométricas.
- Triángulos oblicuángulos.
- Identidades trigonométricas.
- Ecuaciones trigonométricas

COMPETENCIAS BÁSICAS

- Diferencia las características y elementos de los triángulos.
- Aplica el teorema de Pitágoras en la solución de ejercicios y problemas relacionados con triángulos

LOGROS

- Aplica las funciones trigonométricas en la solución de situaciones que requieran el uso de triángulos rectángulos y oblicuángulos.
- Utiliza las identidades trigonométricas fundamentales en la verificación de otras identidades y en la solución de ecuaciones trigonométricas

GENERALIDADES

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es 'la medición de los triángulos”.

En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno; tangente, cotangente; secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Posee numerosas aplicaciones, entre las que se encuentran: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas global de navegación por satélites. (www.es.wikipedia.org)

HISTORIA

Los antiguos egipcios y los babilonios conocían ya los teoremas sobre las proporciones de los lados de los triángulos semejantes. Pero las sociedades prehelénicas carecían de la noción de una medida del ángulo y por lo tanto, los lados de los triángulos se estudiaron en su medida, un campo que se podría llamar trilaterometría.

Los astrónomos babilonios llevaron registros detallados sobre la salida y puesta de las estrellas, el movimiento de los planetas y los eclipses solares y lunares, todo lo cual requiere la familiaridad con la distancia angular medida sobre la esfera celeste. Sobre la base de la interpretación de una tablilla cuneiforme Plimpton 322 (c. 1900 a. C.), algunos incluso han afirmado que los antiguos babilonios tenían una tabla de secantes. Hoy, sin embargo, hay un gran debate acerca de si se trata de una tabla de ternas pitagóricas, una tabla de soluciones de ecuaciones de segundo grado, o una tabla trigonométrica.

Los egipcios, en el segundo milenio antes de Cristo, utilizaban una forma primitiva de la trigonometría, para la construcción de las pirámides. El Papiro de Ahmes, escrito por el escriba egipcio Ahmes (c. 1680-1620 a. C.), contiene el siguiente problema relacionado con la trigonometría:
Si una pirámide es de 250 codos de alto y el lado de su base es de 360 codos de largo, ¿cuál es su Seked?
La solución al problema es la relación entre la mitad del lado de la base de la pirámide y su altura. En otras palabras, la medida que se encuentra para la seked es la cotangente del ángulo que forman la base de la pirámide y su respectiva cara.

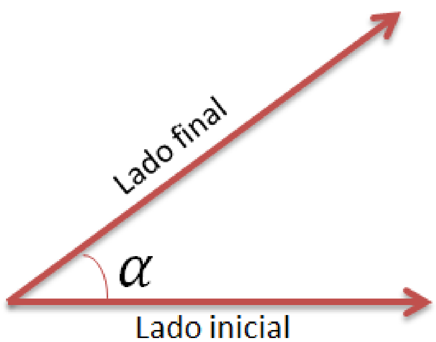
Tablilla babilonia Plimpton 322.

Papiro de Ahmes

Capítulo 1: Sistemas de medición de ángulos

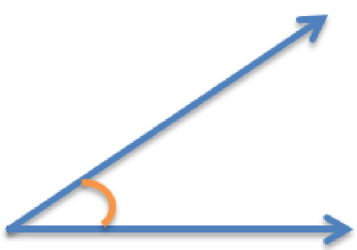
Ángulos, medida y clasificación

Ángulo: un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se les llama lados y al origen común se le denomina vértice.

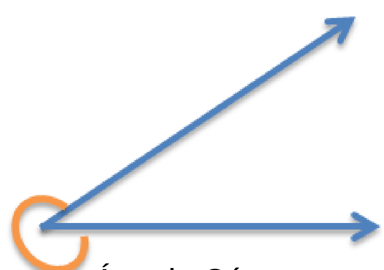


Lo que caracteriza un ángulo es la apertura de sus lados. Si los lados de un ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ están más abiertos que los de otro ángulo $\boldsymbol{\beta}$ se dice que: $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$

Dos semirrectas con origen común determinan dos ángulos distintos; el menor de ellos se llama ángulo convexo y el mayor, ángulo cóncavo.



Ángulo Convexo



Ángulo Cóncavo

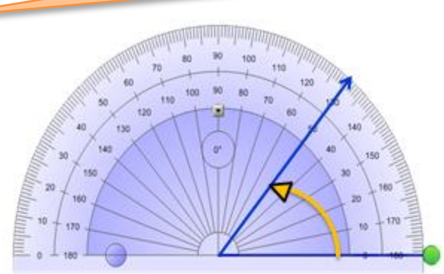
Como puedes observar el ángulo convexo es el interno y mide más de 0° y menos de 180°, y el ángulo cóncavo es el externo y mide más de 180° y menos de 360°

Medición de ángulos:

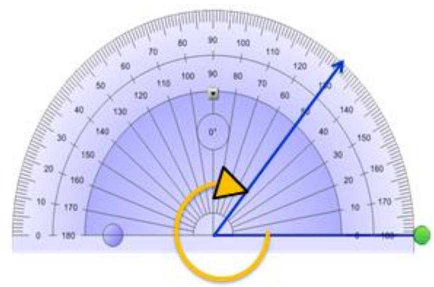
Para medir un ángulo se debe tener en cuenta si la rotación del lado terminal es en sentido contrario al de las agujas del reloj, en este caso se dirá que el ángulo es positivo, en caso contrario la medida será negativa.

*Recuerda, si el ángulo gira contrario a las manecillas del reloj es **positivo.***

*Si gira como las manecillas del reloj es **negativo***

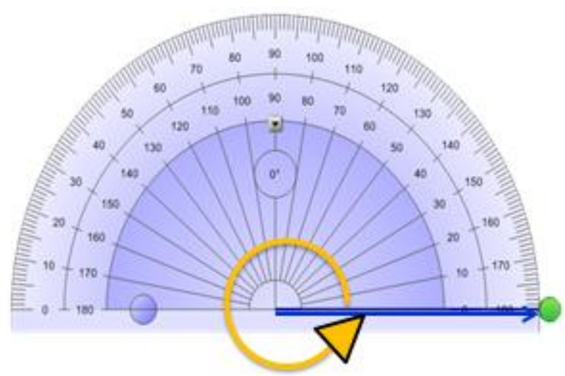


ÁNGULO POSITIVO



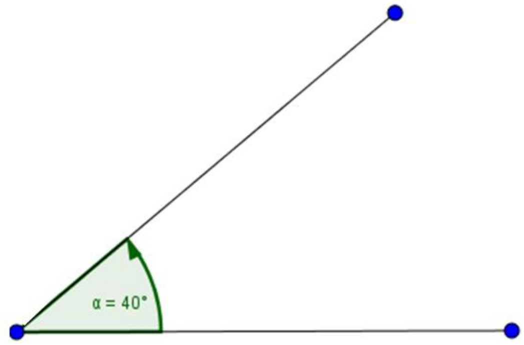
ÁNGULO NEGATIVO

Si el lado terminal realiza una rotación completa, en el sentido contrario de las agujas del reloj, el ángulo generado mide 360°

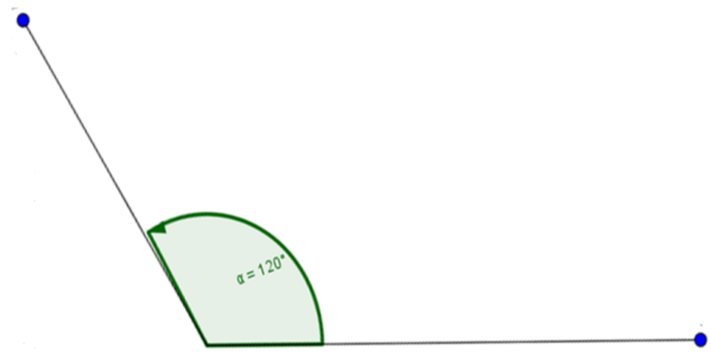


A continuación observarás unos ejemplos de ángulos positivos y negativos

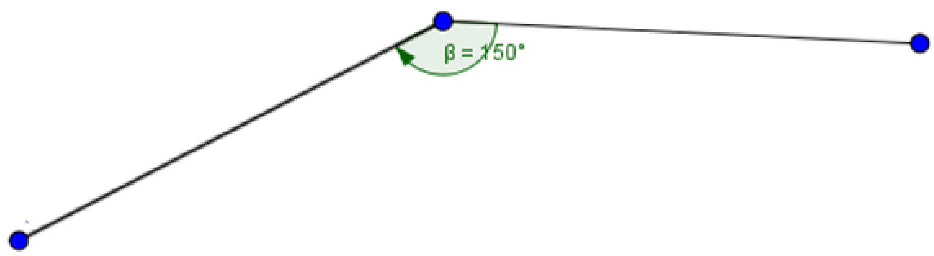
Ángulo de 40°



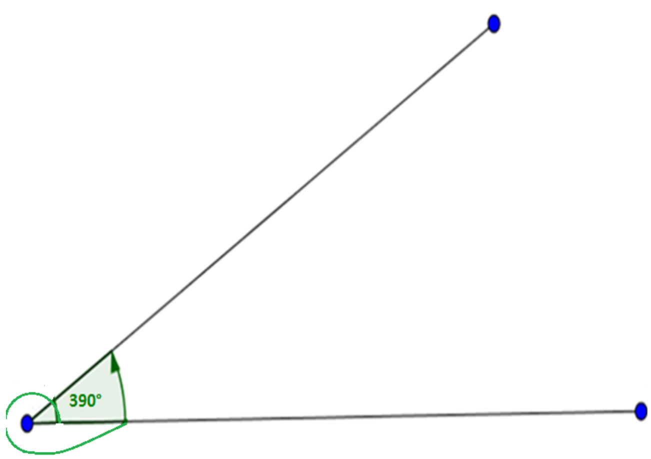
Ángulo de 120°



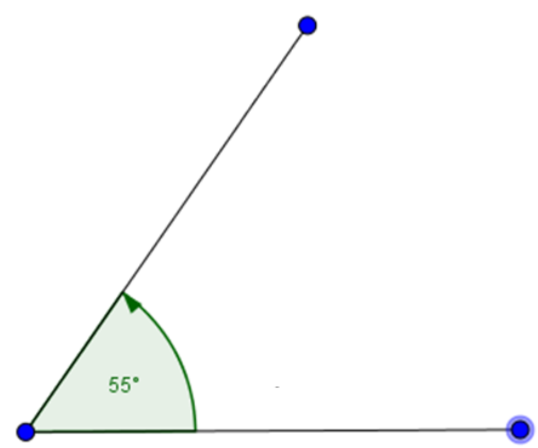
Ángulo de -150°



Ángulo de 390°



Ángulo de 55°



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN:

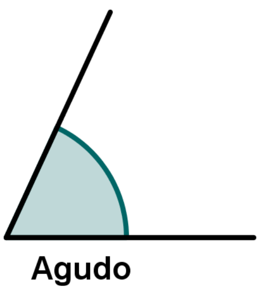
Realizar la representación gráfica de los siguientes ángulos y determinar en cuál cuadrante se encuentran:

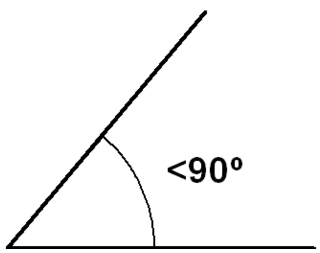
- 50°
- 45°
- 400°
- 750°
- -60°
- 270°
- -100°
- 180°
- -210°
- 445°
- 320°
- -270°

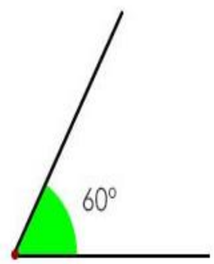
CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

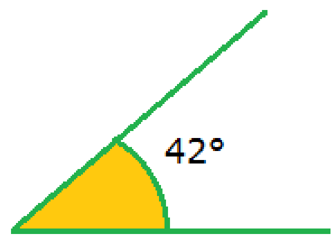
Los ángulos se clasifican y denominan en función de la medida de sus grados.

<u>Ángulo agudo</u>: es un ángulo cuya medida está entre 0° y 90°.

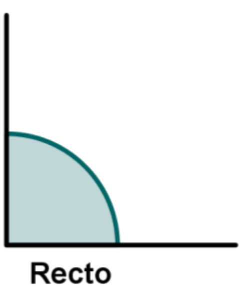


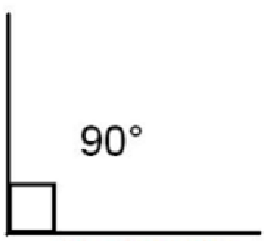


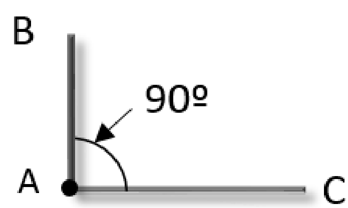


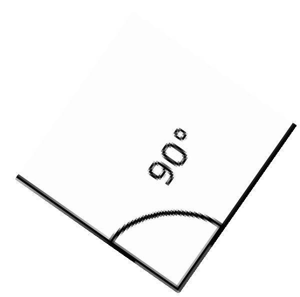


<u>Ángulo recto:</u> es un ángulo que mide 90°.

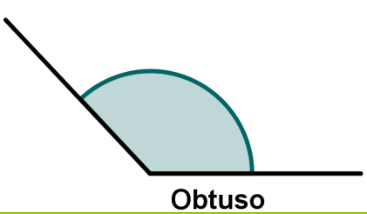


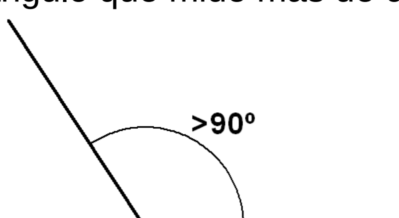


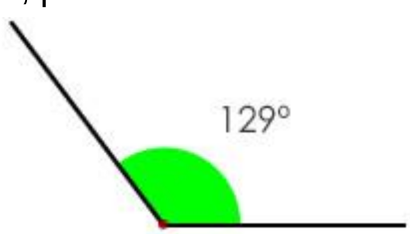




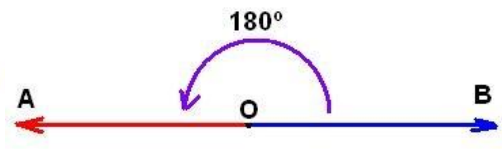
<u>Ángulo obtuso:</u> es un ángulo que mide más de 90°, pero menos de 180°

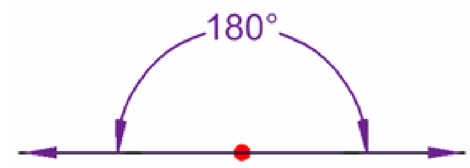




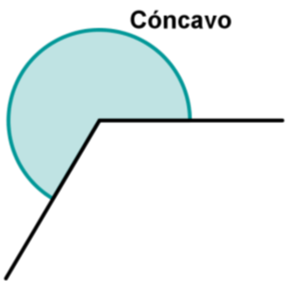


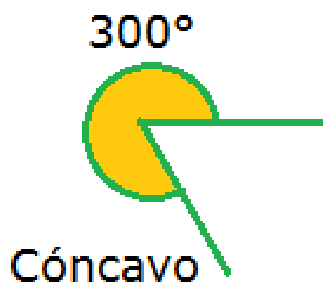
Angulo colineal o llano: es un ángulo que mide 180°

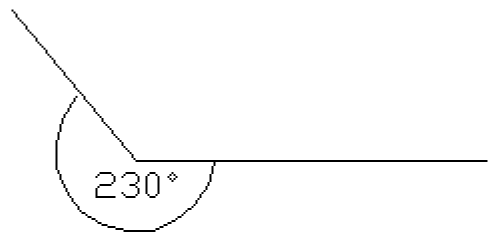




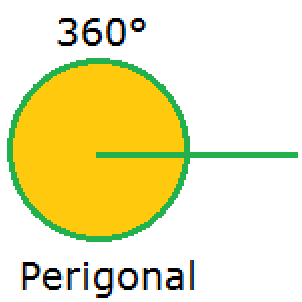
Ángulo cóncavo o entrante: es un ángulo mayor de 180° y menor de 360°

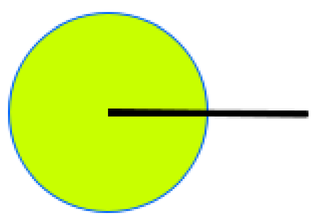
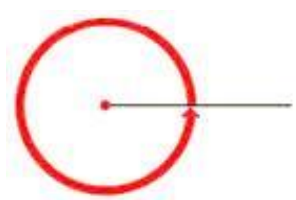






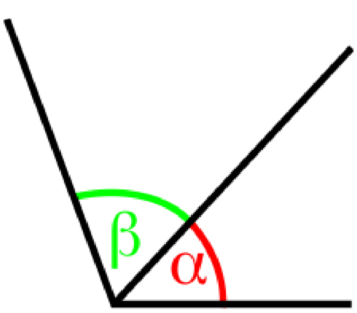
Ángulo perigonal o completo: es un ángulo que mide 360°

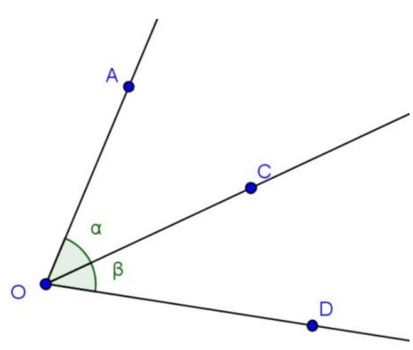


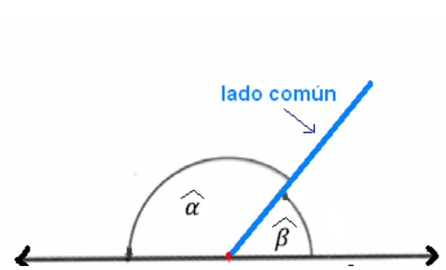



CLASIFICACIÓN CUANDO SE TIENEN DOS ÁNGULOS:

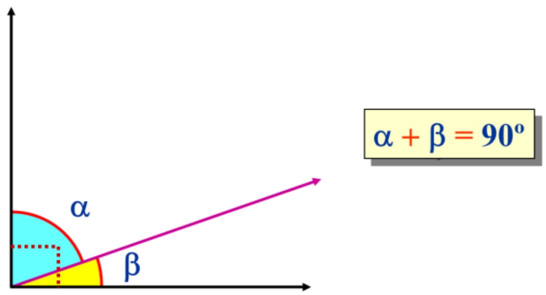
Consecutivos: Dos ángulos son consecutivos cuando tienen un lado en común y están en un mismo plano.

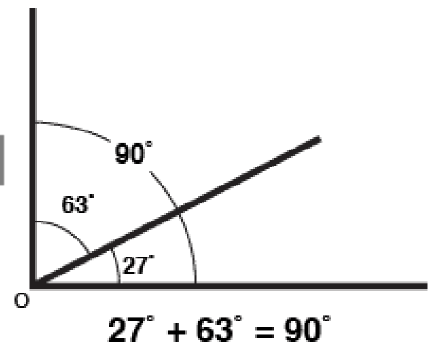


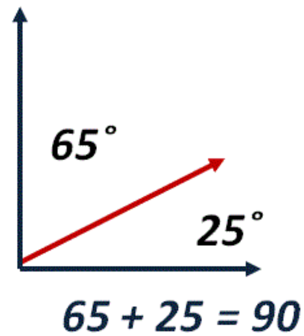




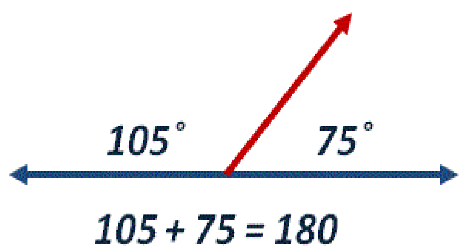
Complementarios: Son dos ángulos que suman 90°

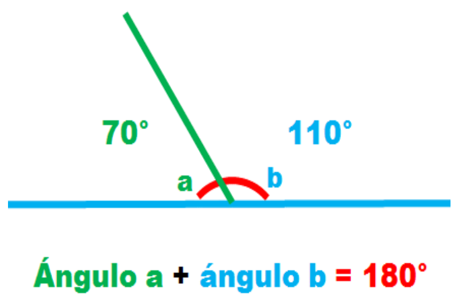


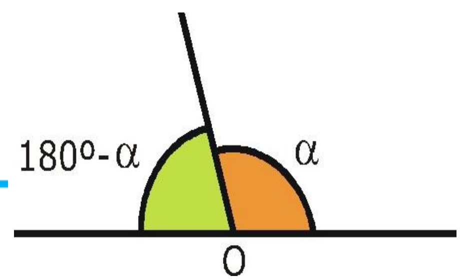




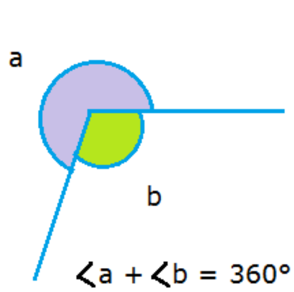
Suplementarios: Son dos ángulos que suman 180°

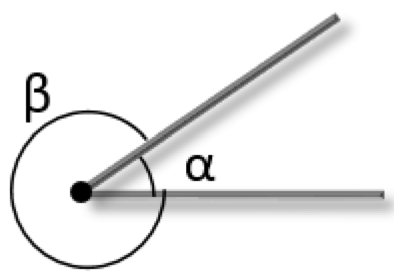


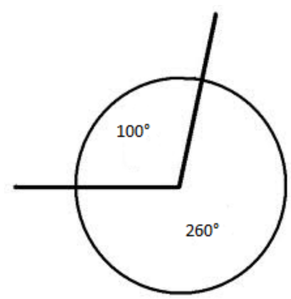




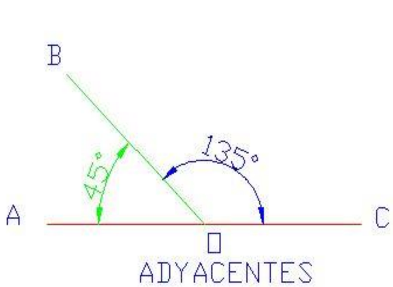
Conjugados: Son dos ángulos que suman 360°

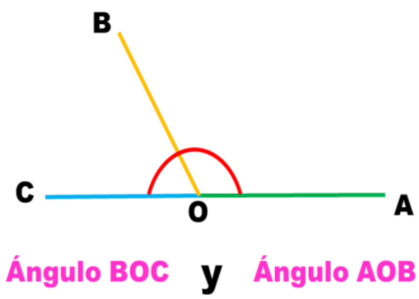


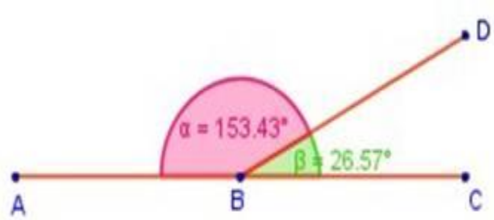




Adyacentes: Son pares de ángulos consecutivos, cuya suma es igual a 180°, además estos ángulos son suplementarios.

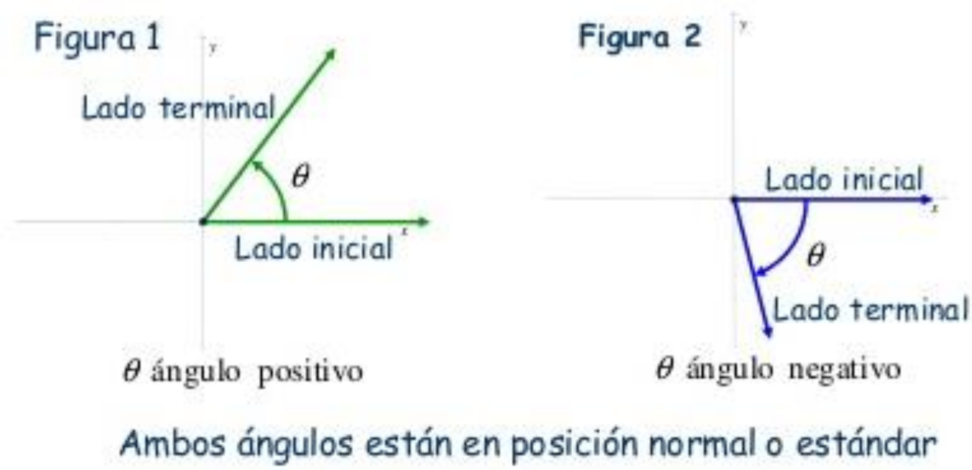






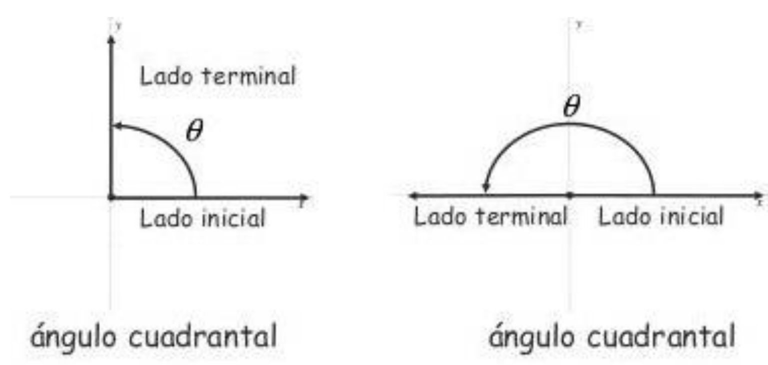
Ángulos en posición normal (estándar)

Un ángulo en un sistema de coordenadas rectangular está en la posición normal o estándar si su vértice está en el origen y su lado inicial a lo largo del eje positivo de X. Una rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj produce un ángulo positivo (Figura 1) y una rotación en el sentido de las manecillas del reloj produce un ángulo negativo (Figura 2)



Ángulos cuadrantales

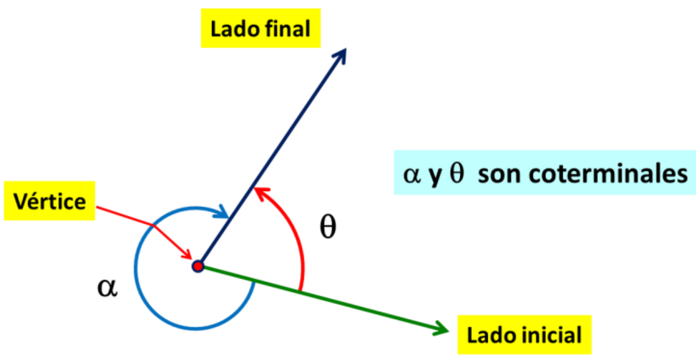
Un ángulo cuadrantal es un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal yace sobre un eje coordenado

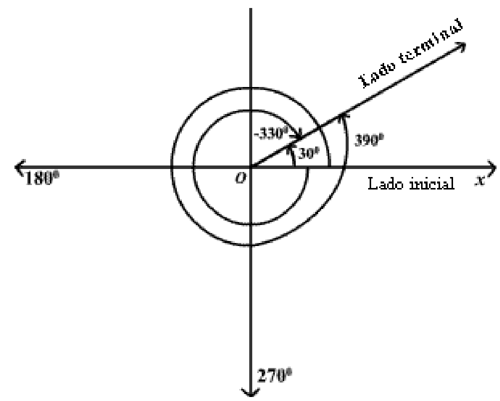


Los ángulos que miden 0°, 90°, 180°, 270° y 360° son ángulos cuadrantales (ángulos en posición estándar que su lado terminal yace sobre los ejes ***X*** o ***Y***)

Ángulos Coterminales

Dos o más ángulos son coterminales, si tienen el mismo vértice y sus lados inicial y final coincidentes respectivamente. Un ángulo puede tener infinitos ángulos coterminales. Por ejemplo 30°, –330° y 390° son todos coterminales.





Para encontrar un ángulo coterminal positivo y uno negativo con un ángulo dado, puede sumar y restar 360° si el ángulo es medido en grados o 2π si el ángulo es medido en radianes.

Para encontrar ángulos coterminales se utiliza la siguiente fórmula:

$$\theta_{coterminal} = \left\{ \begin{array}{l} \theta \pm 360°k, para\ ángulos\ en\ grados \\ \theta \pm 2\pi°k, para\ ángulos\ en\ radianes \end{array} \right\} donde\ \boldsymbol{k}\ es\ el\ número\ de\ revoluciones$$

En los siguientes ejemplos utilizaremos como ***k*** el valor de una revolución, pero recuerda que este valor puede variar.

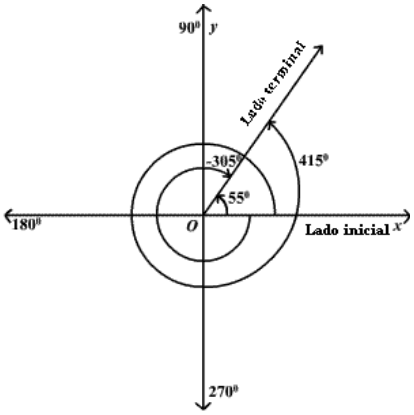
Ejemplo 1:

Encuentre un ángulo coterminal positivo y uno negativo con un ángulo de 55°.

55° – 360° = –305°

55° + 360° = 415°

Un ángulo de –305° y un ángulo de 415° son coterminales con un ángulo de 55°.



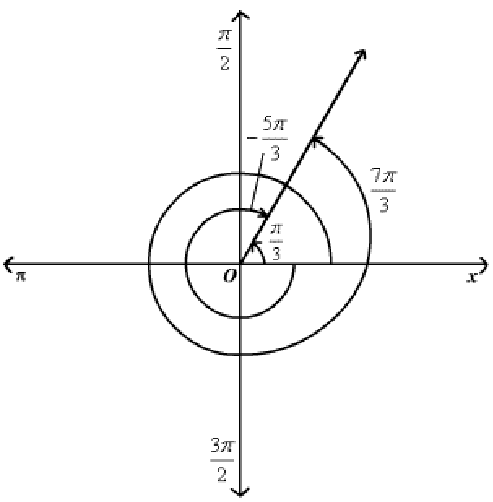
Ejemplo 2:

Encuentre un ángulo coterminal positivo y uno negativo con un ángulo de. $\frac{\pi}{3}$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$$

Un ángulo de $\frac{7\pi}{3}$ y un ángulo de $\frac{-5\pi}{3}$ son coterminales con un ángulo de $\frac{\pi}{3}$



EJERCICIO DE APLICACIÓN

1. Hallar dos ángulos coterminales con -240°
2. Hallar dos ángulos coterminales con $\frac{7\pi}{3}$
3. Hallar dos ángulos coterminales con 170°
4. Hallar dos ángulos coterminales con $\frac{4\pi}{3}$
5. Hallar dos ángulos coterminales con – 150°

SISTEMA SEXAGESIMAL

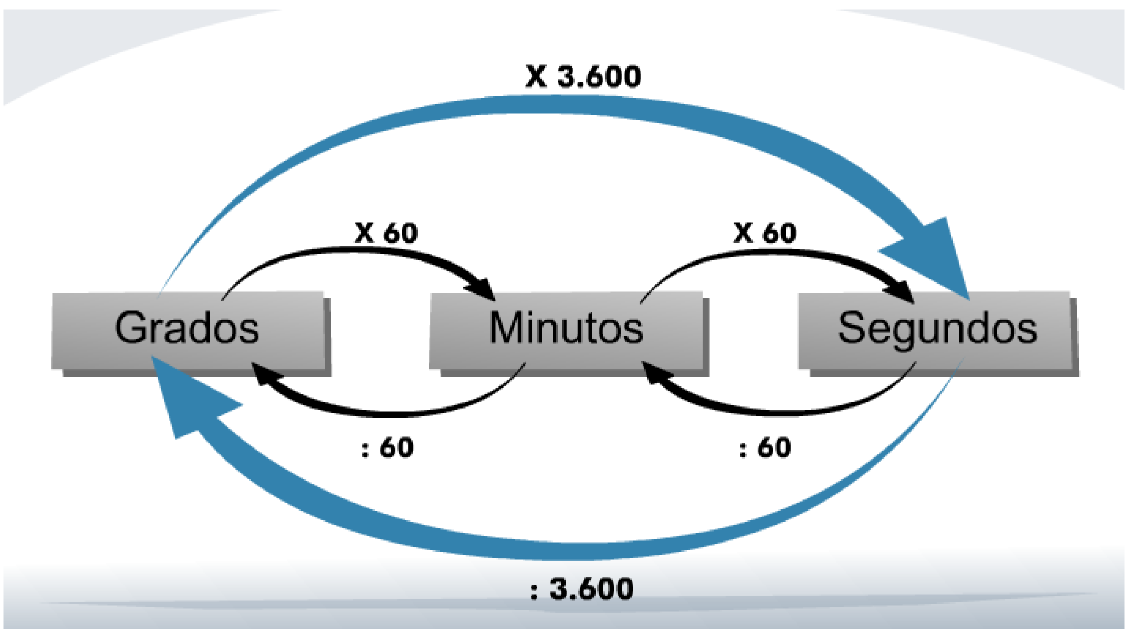
El sistema sexagesimal es un sistema de numeración en el que cada unidad se divide en 60 unidades de orden inferior, es decir, es un sistema de numeración en base 60**.** Se aplica en la actualidad a la medida del tiempo y a la de la amplitud de los ángulos**.**

1h ⟶ 60 min ⟶ 60 seg

1° ⟶ 60 min ⟶ 60 seg

Un grado sexagesimal es la medida del ángulo con vértice en el centro del círculo, de amplitud igual a la 360- ava parte del mismo. Cada división de la circunferencia se llama grado, cada grado se considera dividido en 60 partes iguales llamadas minutos y cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos.

El grado sexagesimal es el ángulo que se obtiene al dividir la circunferencia en 360 partes iguales. Un grado sexagesimal tiene 60 minutos: 1° = 60' • Un minuto sexagesimal tiene 60 segundos: 1' = 60''

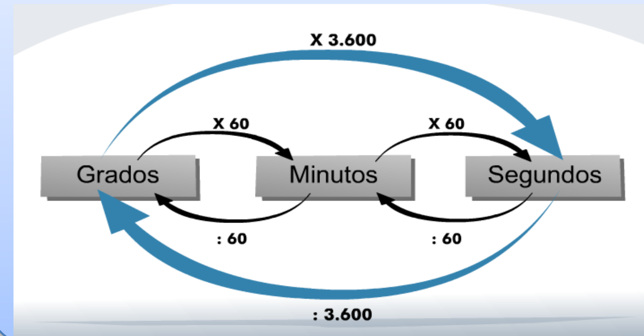


Los símbolos son:

Grados **(°)** Minutos **(’)** Segundos **(’’)**

Para efectuar las conversiones entre este sistema de unidades se debe tener en cuenta la unidad actual y la unidad a la cual se va a pasar, si es a una unidad menor se multiplica y si es a una unidad mayor se divide.

Recuerda utilizar la tabla de medidas:



EJEMPLOS:

1. Expresar 3800’’ en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad menor (segundos) a otras mayores, tendremos que ir dividiendo por 60.

3800’’	60’’
200	63 min
20’’	

Primero dividimos 3800’’ por 60 y así obtenemos los minutos. En este caso nos dio 63 min.
El residuo que nos queda son los segundos (20’’).
Después dividimos los 63 minutos por 60 para poder obtener los grados.

63’	60’
3’	1°

Al dividir los 63’ por 60, se obtienen los grados y el residuo que queda serán los minutos.

Por lo tanto la Respuesta será: **1° 3’ 20’’**

2. Expresar 2930’’ en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad menor (segundos) a otras mayores, tendremos que ir dividiendo por 60.

2930’’	60’’
530	48 min
50’’	

Primero dividimos 2930’’ por 60 y así obtenemos los minutos. En este caso nos dio 48 min.
El residuo que nos queda son los segundos (50’’)

Después dividimos los 48 minutos por 60 para poder obtener los grados.

48’	60’
48’	0°

Al dividir los 48’ por 60, se obtienen los grados y el residuo que queda serán los minutos.

Por lo tanto la Respuesta será: **0° 48’ 50’’**

3. Expresar 340’ en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad menor (segundos) a otra mayor, tendremos que ir dividiendo por 60.

340’	60’
40’	5°

Como en este caso no se dio la unidad en segundos, significa que éstos son igual a cero y por lo tanto solamente se debe pasar los minutos a grados.

Por lo tanto la respuesta será: **5° 40’ 0’’**

4. Expresar 810’ en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad menor (segundos) a otra mayor, tendremos que ir dividiendo por 60.

810’	60’
210	13°
30’	

Como en este caso no se dio la unidad en segundos, significa que éstos son igual a cero y por lo tanto solamente se debe pasar los minutos a grados.

Por lo tanto la respuesta será: **13° 30’ 0’’**

5. Expresar 3,24° en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad mayor (grados) a otra menor, tendremos que ir multiplicando por 60.

3°

En primer lugar dejaremos 3° tal y como lo enuncia el ejercicio y la parte decimal la pasaremos a minutos y segundos haciendo uso de la multiplicación.

0,24° x 60’= 14,40’

Al efectuar la multiplicación dejaremos la parte entera como los minutos (14) y la parte decimal que es igual a 0,40 la multiplicaremos por 60 segundos.

0,40’ x 60’’ = 24”

Al realizar la conversión de minutos (0,40’) a segundos, se obtiene como resultado 24’’.

Por lo tanto la respuesta final será: **3° 14’ 24’’**

6. Expresar 2,65° en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad mayor (grados) a otra menor, tendremos que ir multiplicando por 60.

2°

En primer lugar dejaremos 2° tal y como lo enuncia el ejercicio y la parte decimal la pasaremos a minutos y segundos haciendo uso de la multiplicación.

0,65° x 60’= 39’

Al efectuar la multiplicación observamos que no quedan decimales, por lo tanto no hay segundos y la respuesta final será: **2° 39’ 0’’**

7. Convertir a segundos 6° 12’ 40”

Solución: Para solucionar este ejercicio podemos hacer uso de la tabla de valores descrita inicialmente, en la cual 1°= 3600’’ y 1’ = 60’’. Por lo tanto realizaremos la conversión de cada magnitud y finalmente se efectuará la suma:

6° a segundos= 6 x 3600’’ = 21.600’’

12’ a segundos = 12 x 60’’ = **720’’**

40’’ = **40’’**

Finalmente se hace la suma de los valores: 21.600’’ + 720’’ + 40’’ y nos da como respuesta final **22.360’’**

8. Convertir a grados 960’ 1080’’

Solución: Para solucionar este ejercicio podemos hacer uso de la tabla de valores descrita inicialmente, en la cual 1°= 3600’’ y 1’ = 60’’. Por lo tanto realizaremos la conversión de cada magnitud y finalmente se efectuará la suma:

960’ a grados= 960’ ÷ 60’ = 16°

1080’’ a grados = 1080’’ ÷ 3600’’ = **0.3°**

Finalmente se hace la suma de los valores: 16° + 0,3° y nos da como respuesta final **16,3°**

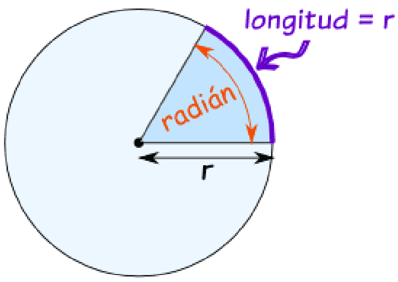
ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN:

Expresar la medida de los siguientes ángulos en grados, minutos y segundos:

13,45°	9,25°	285’
4600’’	3334’’	1987’
15,23°	870’	32,05°
7884”	23,46°	59,75°
5,42°	6490’’	724’
18,75°	7442’’	8642’’
9,37°	26,23°	290’
17,84°	995’	13010’’

MEDIDA ANGULAR EN RADIANES

Un ángulo también puede ser medido en radianes. Un radián es la amplitud que tiene un ángulo que subtiende un arco con la misma longitud que el radio de la circunferencia.



La longitud de la circunferencia es igual a $2.\pi.r$, por lo tanto un ángulo completo tiene 2π radianes, un ángulo llano tiene π radianes, y un ángulo recto tiene $\frac{\pi}{2}$ radianes.

$180° = \pi\ rad$

1 Rad= $\frac{180}{\pi}$ Rad $\rightarrow$ Grados

1 Grado = $\frac{\pi}{180}$ Grados $\rightarrow$ Rad

EJEMPLOS:

Aplicando proporcionalidad directa, podemos calcular el valor del ángulo en radianes.

1. Encontrar la medida en radianes de θ, si θ= 30°

180° = π rad
30° = x

180° = π rad
30° = x

X . 180 = π rad . 30

X = $\frac{30\pi \text{ rad}}{180}$

Al simplificar 30 con 180 se obtiene: $\frac{1}{6}\pi$ **rad**

2. Encontrar la medida en radianes de θ, si θ= 135°

180° = π rad
135° = x

180° = π rad
135° = x

X . 180 = π rad . 135

X = $\frac{135\pi \text{ rad}}{180}$

Al simplificar 135 con 180 se obtiene: $\frac{3}{4}\pi$ **rad**

3. Encontrar la medida en radianes de θ, si θ= 210°

180° = π rad
210° = x

180° = π rad
210° = x

X . 180 = π rad . 210

X = $\frac{210\pi \text{ rad}}{180}$

Al simplificar 210 con 180 se obtiene: $\frac{7}{6}\pi$ **rad**

4. Encontrar la medida en radianes de θ, si θ= - 150°

180° = π rad
-150° = x

180° = π rad
-150° = x

X . 180 = π rad . - 150

X = $\frac{-150\pi \text{ rad}}{180}$

Al simplificar -150 con 180 se obtiene: $\frac{-5}{6}\pi$ **rad**

5. Encontrar la medida en grados de θ, si θ= $\frac{\pi}{6}$ rad

180° = π rad
X = $\frac{\pi}{6}$ rad

180° = π rad
X = $\frac{\pi}{6}$ rad

X . π = 180 . $\frac{\pi}{6}$

x. π rad = 30π

x = $\frac{30\pi}{\pi}$ → X = 30°

Al simplificar 180 con $\frac{\pi}{6}$, se obtiene 30π y al simplificar

$$\frac{30\pi}{\pi} = \mathbf{30°}$$

6. Encontrar la medida en grados de θ, si θ= $\frac{11\pi}{6}$ rad

180° = π rad
X = $\frac{11\pi}{6}$ rad

180° = π rad
X = $\frac{11\pi}{6}$ rad

X . π = 180 . $\frac{11\pi}{6}$

x. π rad = 330π

x = $\frac{330\pi}{\pi}$ X = 330°

Al simplificar 180 con $\frac{11\pi}{6}$, se obtiene 330π y al simplificar

$$\frac{330\pi}{\pi} = \mathbf{330°}$$

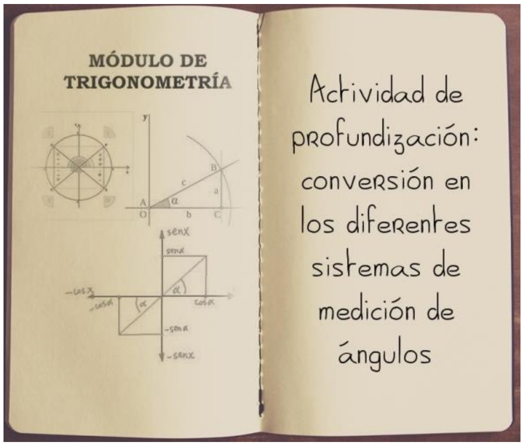
EJERCICIO DE APLICACIÓN:

A. Encontrar la medida en grados que corresponde a los siguientes ángulos dados en radianes, dibujar los ángulos y establecer en cuál cuadrante se encuentran:

1. 5π / 18
2. π / 9
3. $\frac{-2}{3}\pi$
4. $\frac{13}{10}\pi$
5. $\frac{-5}{9}\pi$

B. Encontrar la medida en radianes que corresponde a la medida del ángulo dado en grados, dibujar los ángulos y establecer en cuál cuadrante se encuentran:

1. 100°
2. 630°
3. 72°
4. – 450°
5. 54°



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN:

DEFINICIÓN DE REVOLUCIÓN:

En matemáticas, revolución se usa con el significado de "vuelta" o "giro". Una revolución corresponde a un giro de 360°

1. Encontrar la medida en grados sexagesimales de los siguientes ángulos:

a) 7,08°
b) 2997''
c) 36005''
d) 2385'
e) 14,06°
f) 23,52°
g) 35700''
h) 13624''
i) 3875'
j) 24,16°

2. Si una revolución corresponde a un giro de 360°, efectuar las siguientes conversiones:

a) ¿Cuántas revoluciones son 240°?
b) ¿A cuántos grados equivale $\frac{1}{8}$ de revolución?
c) ¿Cuántas revoluciones hay en 90°?
d) ¿Cuántas revoluciones hay en 720°?
e) ¿Cuántos grados hay en $\frac{3}{4}$ de revolución?

3. Completar el siguiente cuadro y graficar los ángulos

Grados	720°				360°		225°
Radianes			$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$			
Revoluciones		$\frac{3}{2}$				$\frac{3}{4}$	

SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

Para operar en el **sistema sexagesimal** debemos tener en cuenta que cada **unidad se divide en 60 unidades** de orden inferior.

$$1\text{ h} \longrightarrow 60\text{ min} \longrightarrow 60\text{ s}$$

$$1^\circ \longrightarrow 60' \longrightarrow 60''$$

Suma

1°. Se disponen las horas debajo de las horas (o los grados debajo de los grados), los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos; y se suman.

$$\begin{array}{rrrr} & 32^\circ & 24' & 48'' \\ + & 43^\circ & 49' & 25'' \\ \hline & 75^\circ & 73' & 73'' \end{array}$$

2°. Si los segundos suman más de 60, se divide dicho número entre 60; el resto serán los segundos y el cociente se sumará a los minutos.

$$\begin{array}{l|l} 73'' & 60 \\ \cline{2-2} 13'' & 1' \end{array}$$

$$75^\circ \quad 74' \quad 13''$$

3°. Igual para los minutos.

$$\begin{array}{l|l} 74' & 60 \\ \cline{2-2} 14' & 1^\circ \end{array}$$

$$76^\circ \quad 14' \quad 13''$$

Resta

1°. Se disponen las horas debajo de las horas (o los grados debajo de los grados), los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos.

$$\begin{array}{rlll} & 52h & 23\text{ min} & \boxed{18\,s} \\ - & \underline{43h} & \underline{49\text{ min}} & \underline{25\,s} \end{array}$$

2º. Se restan los segundos. Si el minuendo es menor que el sustraendo, pasamos un minuto del minuendo a 60 segundos y se lo sumamos a los segundos del minuendo. A continuación restamos los segundos.

$$\begin{array}{rlll} & 52h & \boxed{22\text{ min}} & 78\,s \\ - & \underline{43h} & \underline{49\text{ min}} & \underline{25\,s} \\ & & & 53\,s \end{array}$$

3º. Igual con los minutos.

$$\begin{array}{rlll} & 51h & 82\text{ min} & 78\,s \\ - & \underline{43h} & \underline{49\text{ min}} & \underline{25\,s} \\ & 8h & 33\text{ min} & 53\,s \end{array}$$

EJEMPLOS:

Realiza las siguientes sumas:

$\boxed{1}$ 68º 35' 42'' + 56º 46' 39''

$$\begin{array}{rlll} & 68^\circ & 35' & 42'' \\ + & \underline{56^\circ} & \underline{46'} & \underline{39''} \\ & 124^\circ & 81' & 81'' \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 81'' & 60 \\ \hline 21'' & 1' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} 82' & 60 \\ \hline 22' & 1^\circ \end{array}$$

$$125^\circ\ 22'\ 21''$$

2 5 h 48min 50 s + 6 h 45 min 30 s + 7 h 58 min 13 s

	5 h	48 min	50 s
	6 h	45 min	30 s
+	7 h	58 min	13 s
	18h	151 min	93 s

93s |60
33 s 1 min

152 min |60
32 min 2 h

18h 152 min 33s $\boxed{20\text{ h } 32\text{ min } 33\text{ s}}$

3 6 h 13 min 45 s + 7 h 12 min 43 s + 6 h 33 min 50 s

	6 h	13 min	45 s
	7 h	12 min	43 s
+	6 h	33 min	50 s
	19h	58 min	138 s

138 s |60
18 s 2min

60min |60
0 1 h

19h 60 min 13s 20 h 18 s

Halla el ángulo complementario y el suplementario de 38° 36' 43''

Debe cumplirse que 38° 36' 43'' y su complementario sumen 90°

	90°		
–	38°	36'	43''

	89°	60'	
–	38°	36'	43''

	89°	59'	60''
–	38°	36'	43''
	51°	23'	17''

Debe cumplirse que 38° 36' 43'' y su suplementario sumen 180°

$$\begin{array}{rllll} & 180^\circ & & \\ - & 38^\circ & 36' & 43'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} & 179^\circ & 60' & \\ - & 38^\circ & 36' & 43'' \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rlll} & 179^\circ & 59' & 60'' \\ - & 38^\circ & 36' & 43'' \\ \hline & 141^\circ & 23' & 17'' \end{array}$$

Halla el ángulo complementario y el suplementario de 25° 38' 40''

25° 38' 40'' y su complementario deben sumar 90°

$$\begin{array}{rlll} & 90^\circ & & \\ - & 25^\circ & 38' & 40'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} & 89^\circ & 60' & \\ - & 25^\circ & 38' & 40'' \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rlll} & 89^\circ & 59' & 60'' \\ - & 25^\circ & 38' & 40'' \\ \hline & 64^\circ & 21' & 20'' \end{array}$$

25° 38' 40'' y su suplementario deben sumar 180°

$$\begin{array}{rlll} & 180^\circ & & \\ - & 25^\circ & 38' & 40'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} & 179^\circ & 60' & \\ - & 25^\circ & 38' & 40'' \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rlll} & 179^\circ & 59' & 60'' \\ - & 25^\circ & 38' & 40'' \\ \hline & 154^\circ & 21' & 20'' \end{array}$$

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN:

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) 25° 30’ + 10° 30’

b) 90° – 50° 30’

c) 25° 30’ + 40° 30’

d) 57° 45’ – 47° 15’

e) 44° 53’ 37” + 32° 35’ 42”

f) 83° 25’ 12” – 35° 48’ 30”

g) 36° 42’ 25” + 47° 23’ 52”

h) 125° 44’ 18” – 47° 51’ 23”

i) 25° 15’ + 25° 45’

j) 33° 30’ – 22° 15’

k) 45° 23’ 15” + 54° 40’ 42”

l) 82° 23’ 14” – 59° 35’ 22”

m) 23° 40’ 19” + 47° 25’ 32”

n) 56° 22’ 11” – 14° 34’ 33”

o) 44° 44’ 44” + 55° 55’ 55”

p) 107° 2’ 23” – 95° 36’ 59”

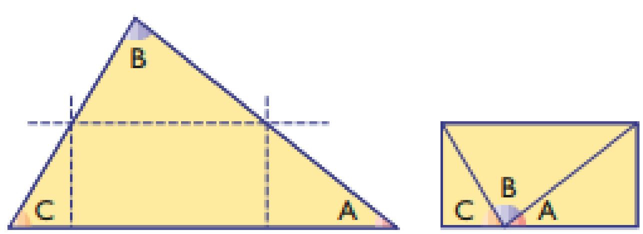
2. Un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 23° 44’ 53”. ¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos?

3. Un ángulo mide 43° 28’ 45”. Halla cuánto mide el complementario.

4. Un ángulo mide 83° 14’ 27”. Halla cuánto mide el suplementario.

5. Cada uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles mide 45° 55’ 17”. Halla cuánto mide el ángulo desigual.

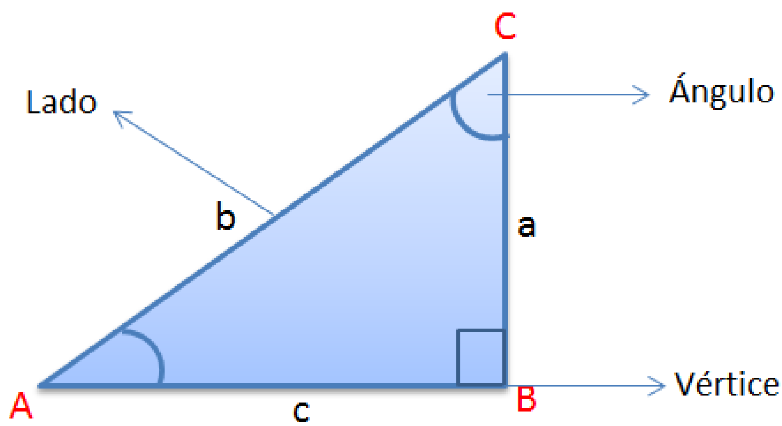
6. En el siguiente triángulo, el ángulo A mide 37° 22’ 45” y el ángulo B mide 83° 53’ 48”. ¿Cuánto mide el ángulo C?



Capítulo 2: Triángulos rectángulos y teoremas

Triángulo y su clasificación:

Un triángulo es la porción de plano limitado por tres rectas que se cortan dos a dos. Los puntos de intersección son los vértices del triángulo A, B y C. Los segmentos determinados son los lados del triángulo a, b y c. Los lados forman los ángulos interiores. Un triángulo tiene 3 elementos: 3 ángulos, 3 vértices y 3 lados. La suma de los tres ángulos internos de un triángulo suma 180°.



Clasificación de los triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados

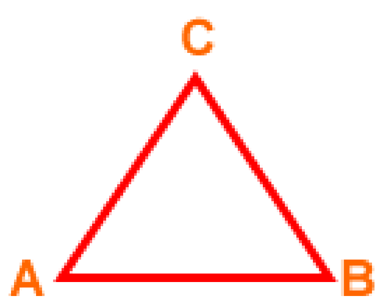
Según la medida de los lados se clasifican en:

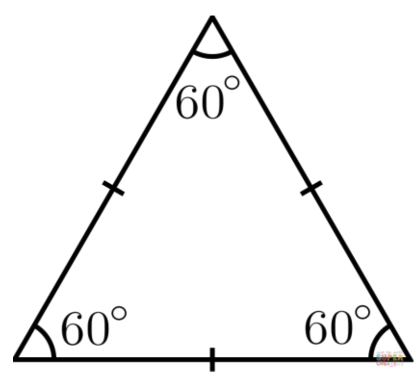
<u>Triángulo equilátero:</u> El triángulo equilátero es aquel que tiene todos sus lados y ángulos de la misma medida, en donde:

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$,

$\overline{BC} \cong \overline{CA}$,

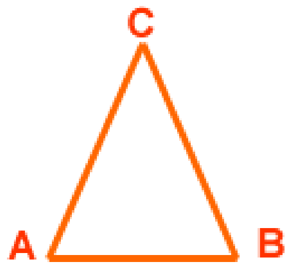
$\overline{CA} \cong \overline{AB}$

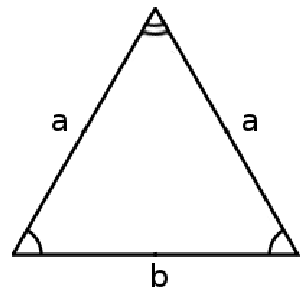




Triángulo Isósceles: El triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados de igual medida y uno distinto, por consiguiente también tiene dos ángulos de igual medida y uno de medida diferente.

$\overline{BC} \cong \overline{CA}$



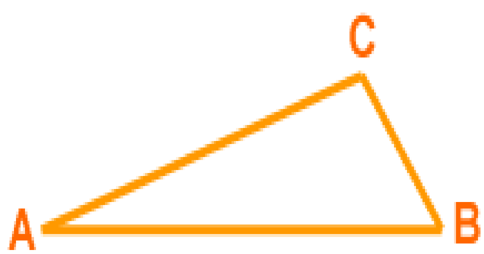


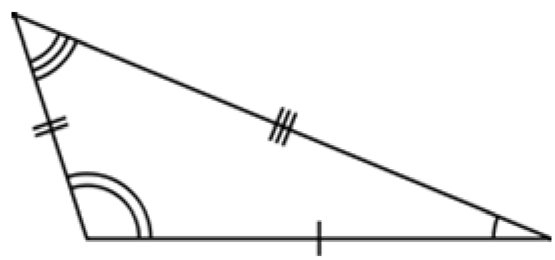
Triángulo escaleno: El triángulo escaleno tiene sus tres lados y sus tres ángulos de diferentes medidas.

$\overline{AB} \neq \overline{BC}$,

$\overline{BC} \neq \overline{CA}$,

$\overline{CA} \neq \overline{AB}$

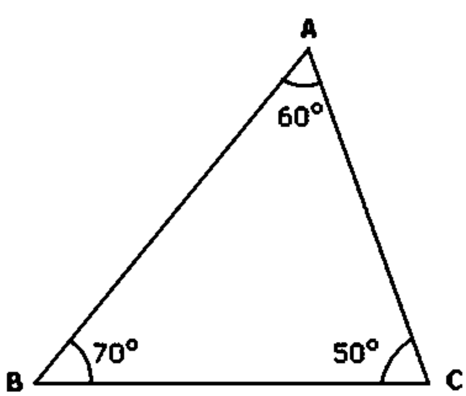


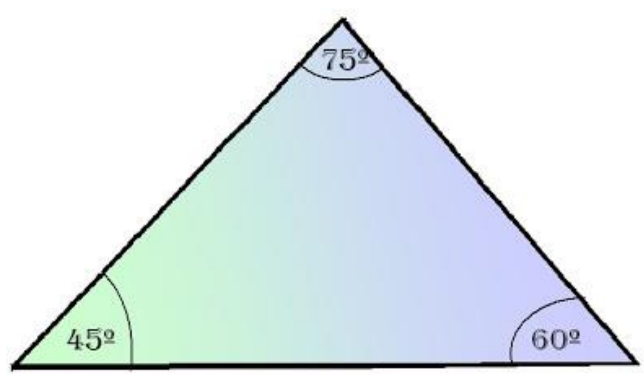


Clasificación de los triángulos de acuerdo a la longitud de sus ángulos

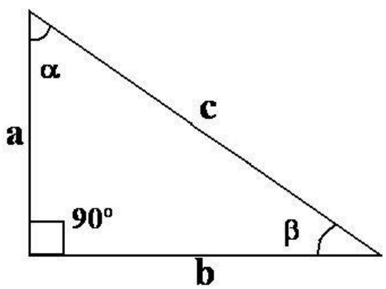
Según la medida de sus ángulos los triángulos se clasifican en:

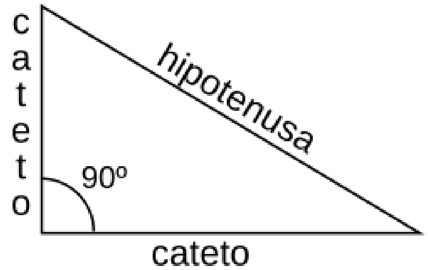
Triángulo Acutángulo: cuando sus tres ángulos son agudos (miden menos de 90°)

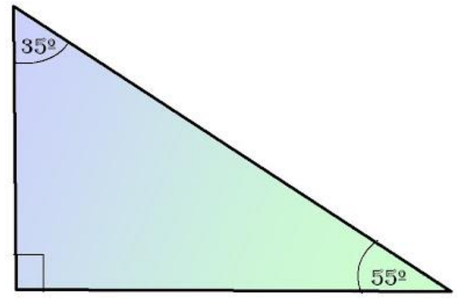




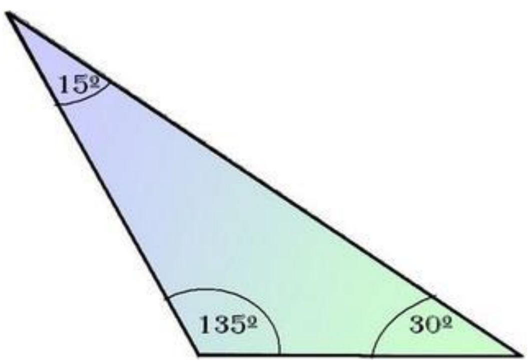
<u>Triángulo Rectángulo:</u> cuando tiene un ángulo recto (mide 90°). Los lados que forman el ángulo recto se llaman ***catetos*** y el lado opuesto al ángulo se conoce como ***hipotenusa.***

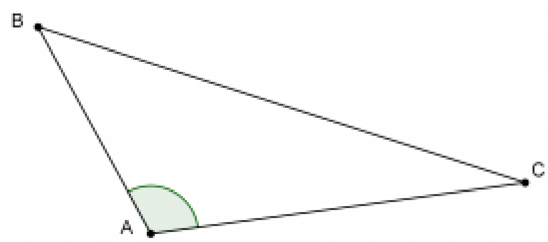






<u>Triángulo Obtusángulo:</u> Cuando tiene un ángulo obtuso (mide más de 90°)

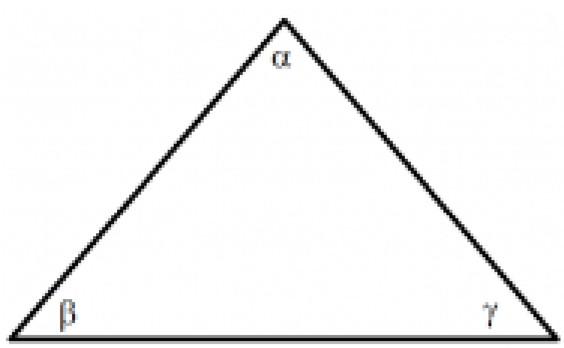




PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS:

La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180º.

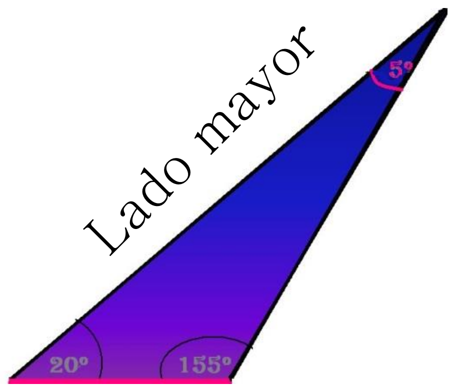
Dos de los ángulos son, necesariamente, agudos. El tercero puede ser también agudo, o bien recto u obtuso.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

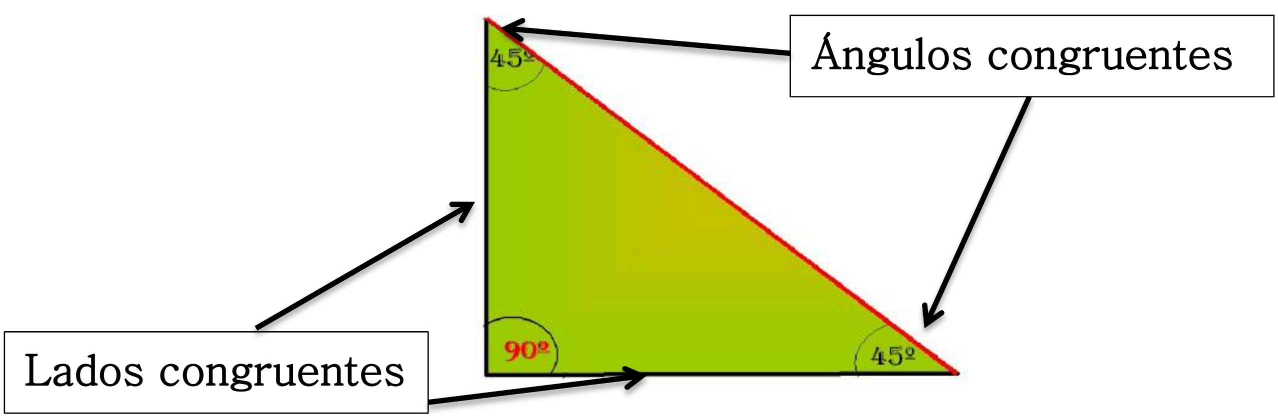
En un triángulo, a mayor (menor) lado se opone mayor (menor) ángulo.

- En un triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.

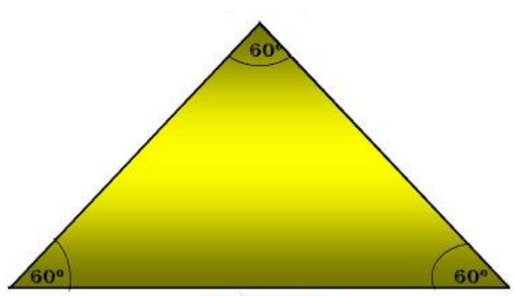


En un triángulo, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes y a ángulos congruentes se oponen lados congruentes.

Nota: Dos ángulos son congruentes solamente si tienen la misma medida.

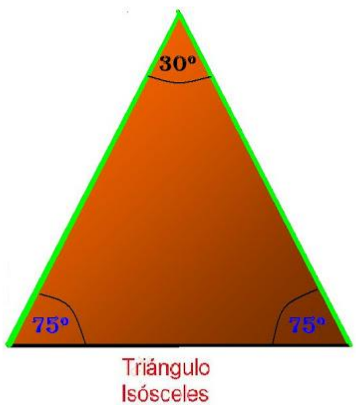


Los ángulos interiores de un triángulo equilátero miden todos 60º.

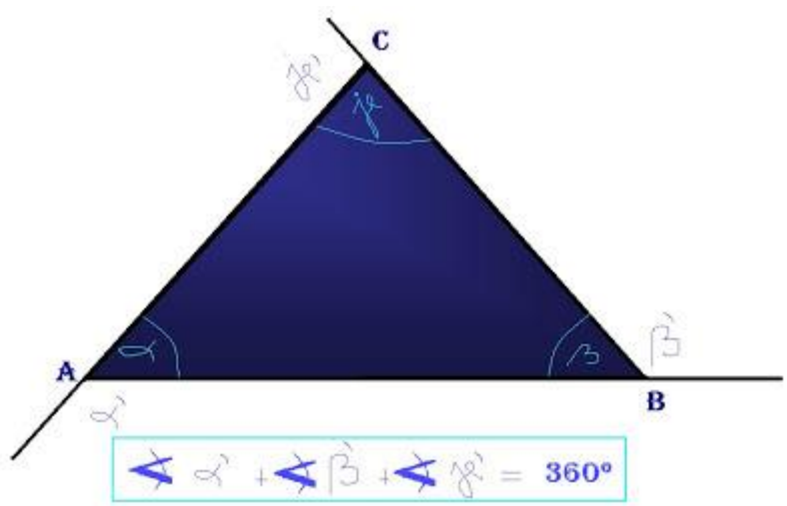


Triángulo Equilátero

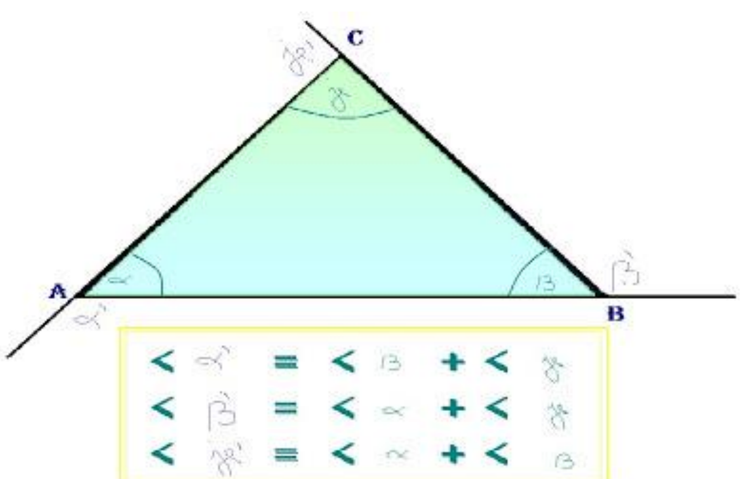
En un triángulo isósceles., los ángulos basales son congruentes.

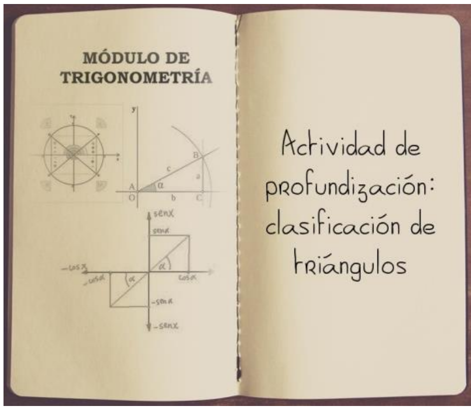


La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo es 360º.



En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a él.





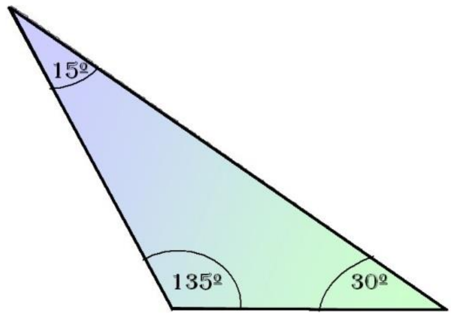
ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

1.- Identifica el siguiente triángulo:

a) Un triángulo acutángulo

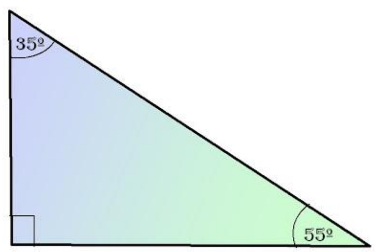
b) Un triángulo rectángulo

c) Un triángulo obtusángulo



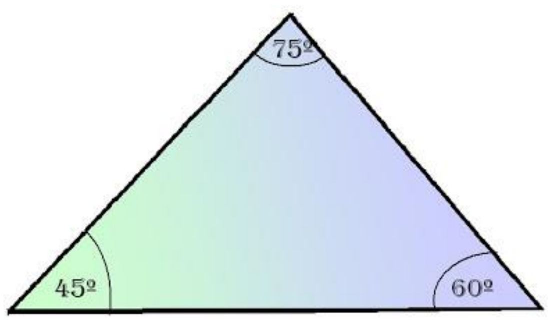
2.- Identifica el siguiente triángulo:

a) Un triángulo acutángulo
b) Un triángulo rectángulo
c) Un triángulo obtusángulo

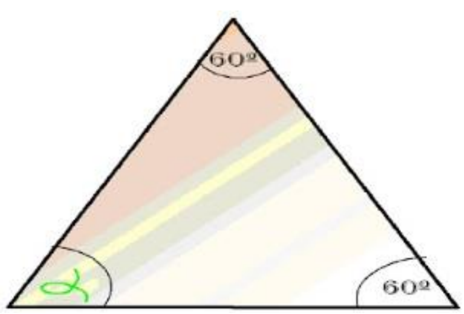


3.- Identifica el siguiente triángulo:

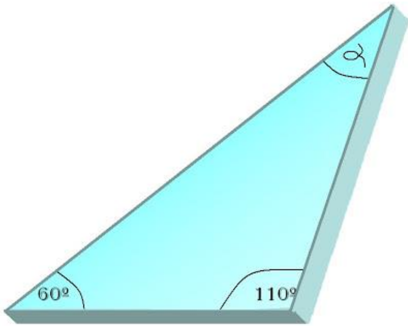
a) Un triángulo acutángulo.
b) Un triángulo rectángulo.
c) Un triángulo obtusángulo.



4 - La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180º, entonces, cuánto vale el ángulo que falta.



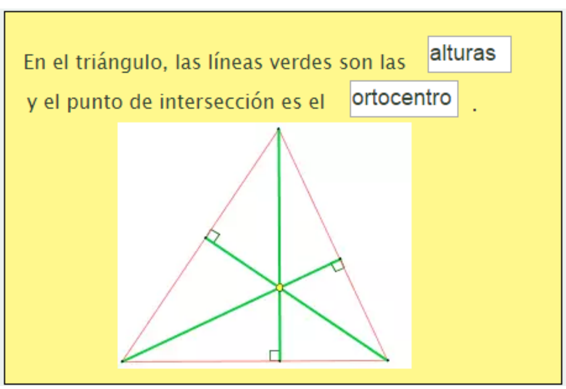
5 - La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º, entonces ¿cuánto vale α ?

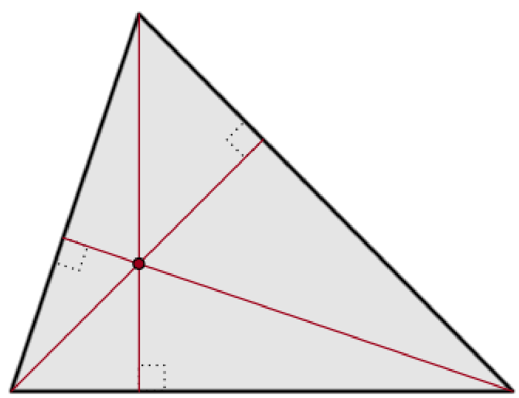


RECTAS DEL TRIÁNGULO: BASE, ALTURA, MEDIANA, BISECTRIZ Y MEDIATRIZ

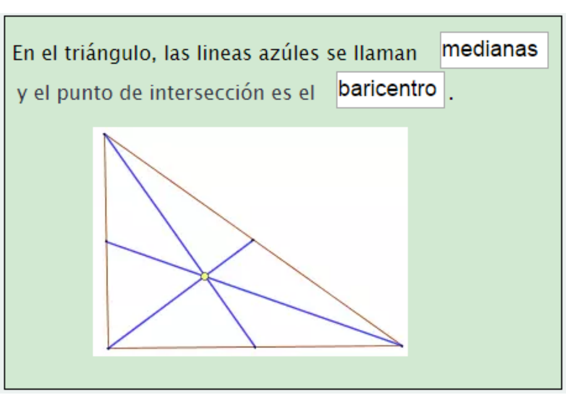
BASE: La base de un triángulo es cualquiera de sus lados.

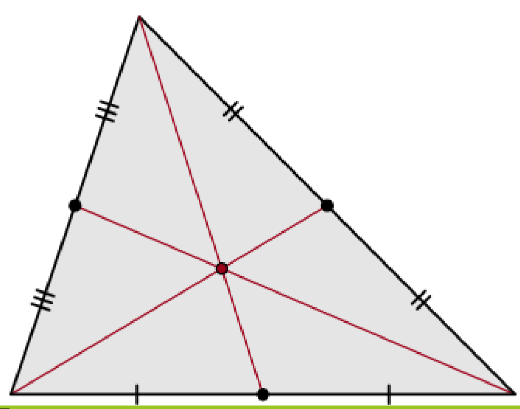
ALTURA: la altura de un triángulo es el segmento de recta trazado desde un vértice del triángulo, perpendicularmente al lado opuesto o a su prolongación. En un triángulo hay tres alturas, una desde cada vértice; las tres alturas se cortan en un punto llamado ortocentro.



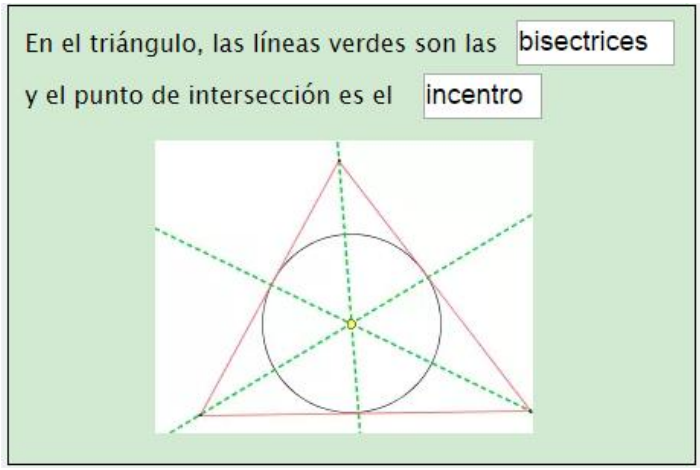


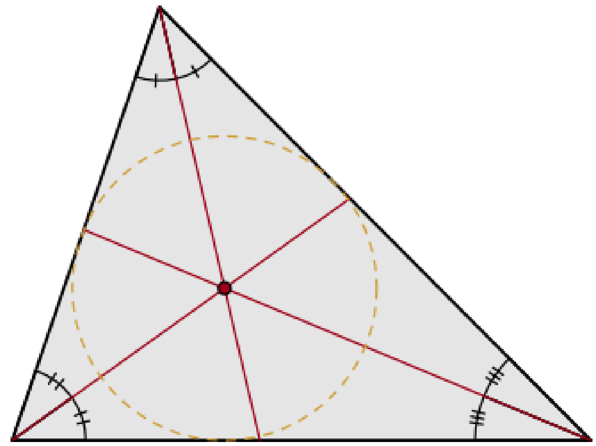
MEDIANA: es el segmento de recta trazado desde un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto. En un triángulo hay tres medianas, una sobre cada lado; las tres medianas se cortan en un punto llamado baricentro.



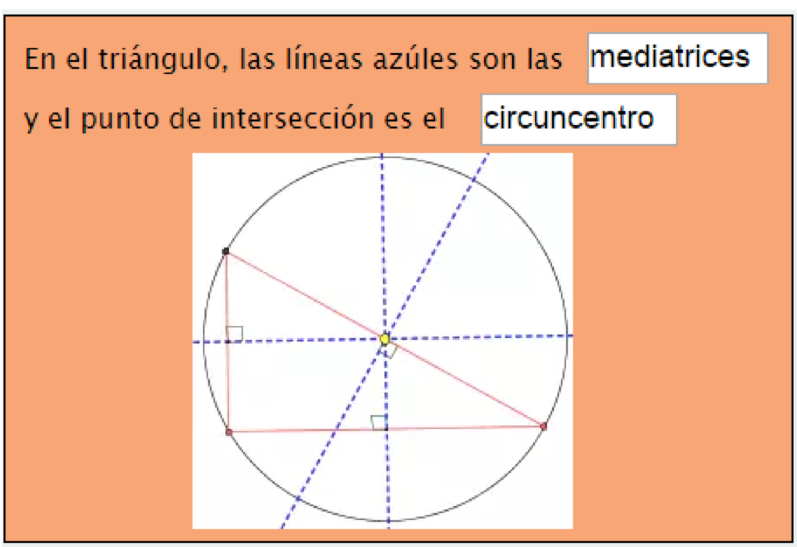


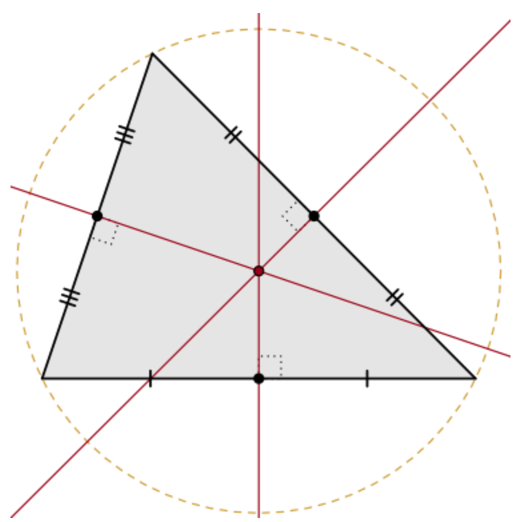
BISECTRIZ: es una recta que divide un ángulo interior del triángulo en dos ángulos congruentes. Consecutivamente en un triángulo hay tres bisectrices, una para cada ángulo; las tres bisectrices se cortan en un punto llamado incentro.





MEDIATRIZ: es la recta que pasa por el punto medio de un lado y perpendicular a éste. Las tres mediatrices se cortan en un punto llamado circuncentro.



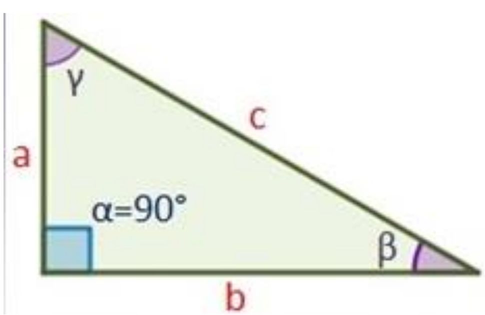


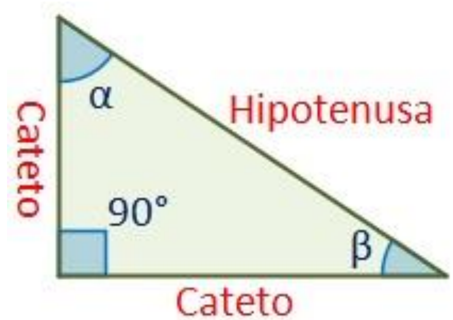
TRIÁNGULO RECTÁNGULO Y TEOREMA DE PITÁGORAS

TRIÁNGULO RECTÁNGULO: Un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto (es decir, mide 90°) en uno de sus ángulos agudos.

Los lados en un triángulo rectángulo tienen nombres, de esta forma llamamos hipotenusa al lado de mayor tamaño que además es el que siempre se encuentra en el lado opuesto al ángulo interno que es el que tiene 90° como medida, los otros dos lados reciben la denominación de catetos y la intersección de ambos se lleva a cabo en el ángulo rectángulo interno característico de todo triángulo rectángulo.

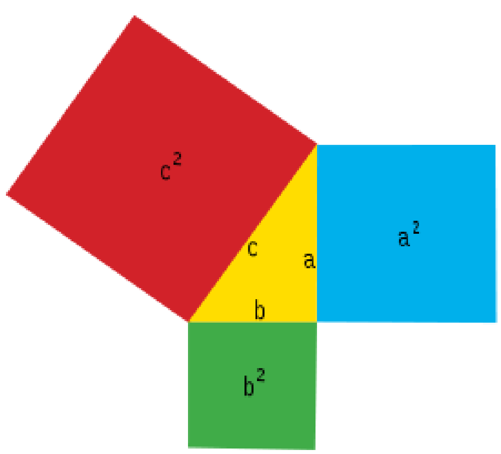
En todo **triángulo rectángulo** se cumple que: Tiene dos ángulos agudos. La hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos. La altura que parte del vértice del ángulo recto, coincide con un cateto, con tal de considerar al otro cateto como una base.

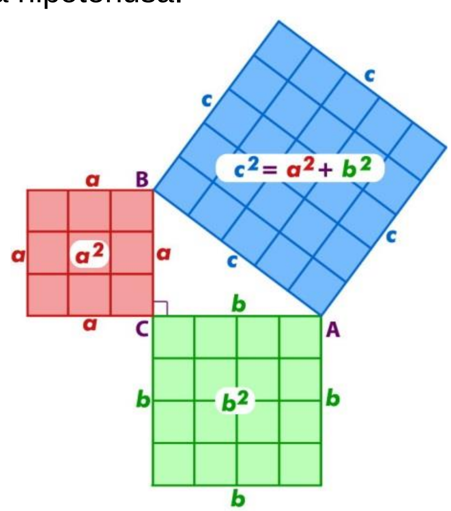




TEOREMA DE PITÁGORAS

Este teorema indica la relación existente entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo en donde si elevamos al cuadrado cada uno de los dos catetos y sumamos ambos, tendremos una medida igual al cuadrado de la hipotenusa.





Es decir, si llamamos a la hipotenusa *h* y a cada uno de los catetos *a* y *b*, tendremos:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

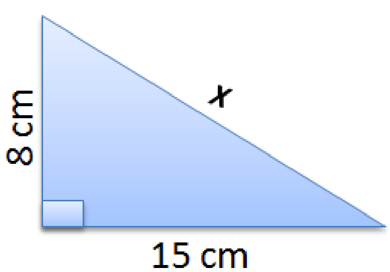
Las **aplicaciones del teorema de Pitágoras** son muchas y vienen ayudando a las distintas civilizaciones desde su descubrimiento realizado por Pitágoras de Samos hace ya bastantes siglos, incluso antes de la era Cristiana.

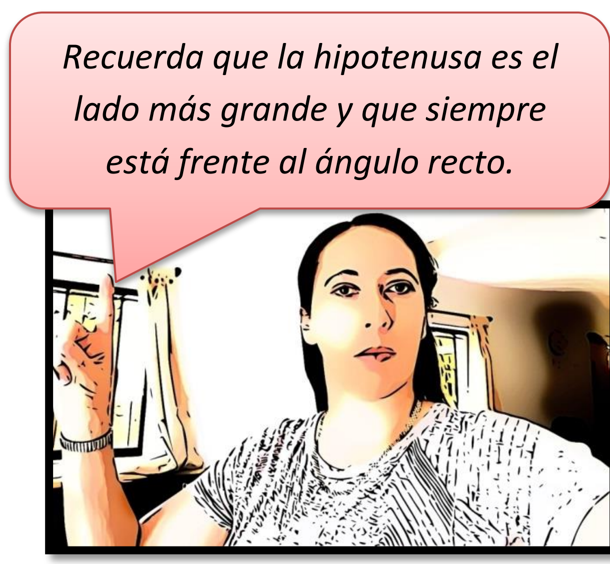
Para entender bien el **Teorema de Pitágoras** debemos de tener claros algunos conceptos. Por ejemplo que sólo es aplicable a los triángulos rectángulos, es decir, a aquellos triángulos que tienen un ángulo recto. También hemos de saber cuáles son los nombres que reciben los lados de un triángulo rectángulo: los lados que conforman el ángulo recto se llaman catetos, mientras el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa.

Otro aspecto importante sobre el Teorema de Pitágoras es el relacionado con sus usos, este teorema es utilizado en una gran cantidad de situaciones para hallar medidas que desconocemos y que de otra forma no se podrían calcular de forma exacta o que llevaría mucho tiempo hacerlo.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CON EL TEOREMA DE PITÁGORAS

1. En el siguiente triángulo calcular el valor de ***X***





Solución:

- ✓ Lo primero que se debe tener en cuenta es identificar qué lado se va a calcular, en este caso ***X*** corresponde a la hipotenusa.

- ✓ Para calcular la hipotenusa se suman los cuadrados de los catetos:

$X^2 = (8\text{ cm})^2 + (15\text{ cm})^2$

$X^2 = 64\text{ cm}^2 + 225\text{ cm}^2$

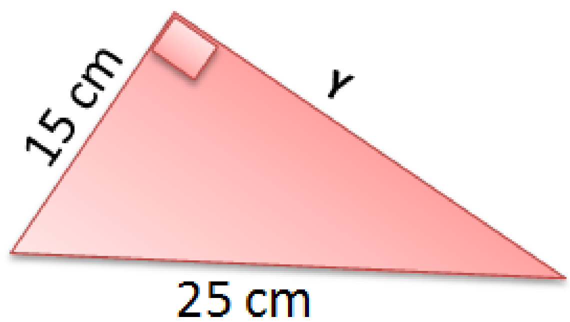
$X^2 = 289\ cm^2$

- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos.

$X = \sqrt{289\ cm^2} = 17\ cm$

- ✓ Finalmente el valor obtenido (17 cm) es el valor de la hipotenusa.

2. En el siguiente triángulo hallar el valor de ***Y***



Solución:

- ✓ Lo primero que se debe tener en cuenta es identificar qué lado se va a calcular, en este caso ***Y*** corresponde al valor de un cateto.

- ✓ Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:

$Y^2 = (25\ cm)^2 - (15\ cm)^2$

$Y^2 = 625\ cm^2 - 225\ cm^2$

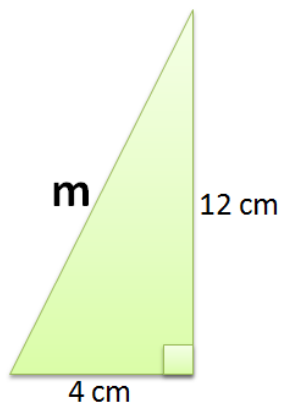
$Y^2 = 400\ cm^2$

- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior.

$Y = \sqrt{400\ cm^2} = 20\ cm$

- ✓ Finalmente el valor obtenido (20 cm) es el valor del cateto.

3. En el siguiente triángulo hallar el valor de ***M***



Solución:

- ✓ Lo primero que se debe tener en cuenta es identificar qué lado se va a calcular, en este caso ***M*** corresponde a la hipotenusa.

- ✓ Para calcular la hipotenusa se suman los cuadrados de los catetos:

$M^2 = (4\ cm)^2 + (12\ cm)^2$

$M^2 = 16\ cm^2 + 144\ cm^2$

$M^2 = 160\ cm^2$

- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos.

$M= \sqrt{160\ cm^2} =$

Como en este caso 160 no tiene raíz cuadrada exacta, procederemos entonces a descomponer este valor en sus factores primos para así obtener su valor sin decimales.

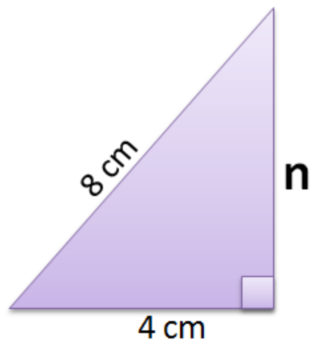
160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$\sqrt{2^2 . 2^2 . 2 . 5} \rightarrow$ Cómo es una raíz cuadrada, todos los valores que estén a la 2 salen de la raíz, los demás quedan entre la raíz.

$2 . 2 . \sqrt{2 . 5} \rightarrow 4\sqrt{10}$

- ✓ Finalmente el valor obtenido ($4\sqrt{10}$) es el valor de la hipotenusa.

4. En el siguiente triángulo hallar el valor de ***N***



Solución:

✓ Lo primero que se debe tener en cuenta es identificar qué lado se va a calcular, en este caso ***N*** corresponde al valor de un cateto.

✓ Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:

$N^2 = (8\ cm)^2 - (4\ cm)^2$

$N^2 = 64\ cm^2 - 16\ cm^2$

$N^2 = 48\ cm^2$

✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior.

$N = \sqrt{48\ cm^2} =$

Como en este caso 48 no tiene raíz cuadrada exacta, procederemos entonces a descomponer este valor en sus factores primos para así obtener su valor sin decimales

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

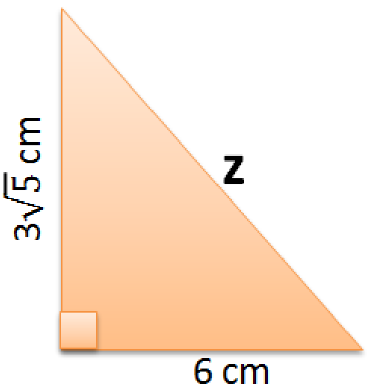
$\sqrt{2^2 \, . \, 2^2 . 3} \rightarrow$

Cómo es una raíz cuadrada, todos los valores que estén a la 2 salen de la raíz, los demás quedan entre la raíz.

$2.\,2.\sqrt{3} \rightarrow 4\sqrt{3}$

✓ Finalmente el valor obtenido ($4\sqrt{3}$) es el valor del cateto.

5. En el siguiente triángulo hallar el valor de ***Z***



Solución:

- ✓ Lo primero que se debe tener en cuenta es identificar qué lado se va a calcular, en este caso Z corresponde a la hipotenusa.

- ✓ Para calcular la hipotenusa se suman los cuadrados de los catetos:

$Z^2 = (6\ cm)^2 + (3\sqrt{5}\ cm)^2$ →

En el caso del segundo paréntesis son dos términos que se están multiplicando, uno el 3 y otro $\sqrt{5}$, por lo tanto se eleva al cuadrado cada uno: $(3)^2$, da como resultado 9, y $(\sqrt{5}\ )^2$, da como resultado 5.

$Z^2 = 36\ cm^2 + (9.\ 5)\ cm^2$

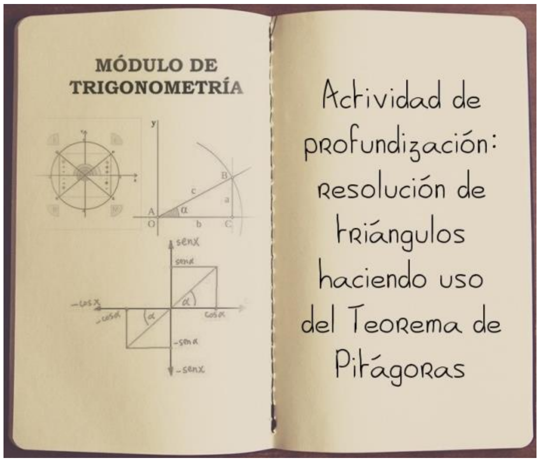
$Z^2 = 36\ cm^2 + 45\ cm^2$

$Z^2 = 81\ cm^2$

- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos.

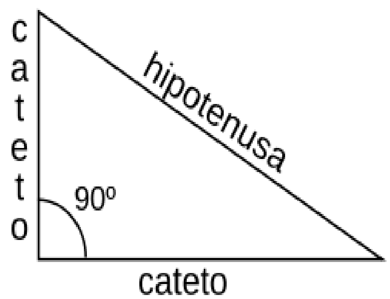
$Z = \sqrt{81\ cm^2} = 9\ cm$

- ✓ Finalmente el valor obtenido (9 cm) es el valor de la hipotenusa.



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

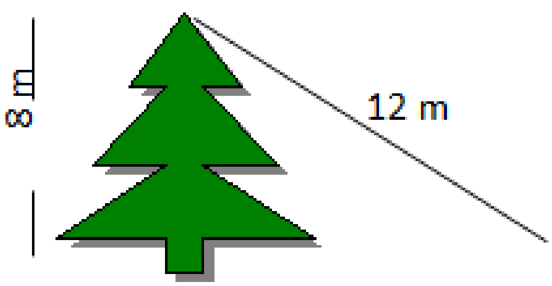
Haciendo uso del teorema de Pitágoras completar la siguiente tabla, dejando consignado el procedimiento para cada triángulo.

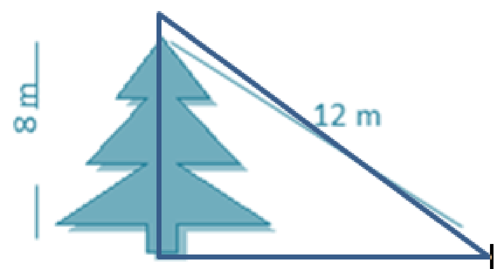
	**Cateto**	**Cateto**	**Hipotenusa**
1		8	10
2	5	12	
3	1		$\sqrt{2}$
4		$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
5	$\sqrt{10}$		$\sqrt{15}$
6	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$	
7	10		26
8		24	$4\sqrt{61}$
9	27	36	
10		$5\sqrt{2}$	10
11	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	
12	24		48
13		8	17
14	9		15
15	2	2	

Aplicación del teorema de Pitágoras en la solución de situaciones problema con triángulos rectángulos

El teorema de Pitágoras se puede emplear también para dar solución a ejercicios y problemas relacionados con triángulos rectángulos. A continuación veremos algunos ejemplos.

1. Calcular la medida aproximada de la sombra del árbol.





Solución:

- ✓ En este caso podemos observar como este problema podemos formar un triángulo rectángulo en relación a la altura y la sombra del árbol, por lo tanto la sombra corresponde al valor de un cateto.

- ✓ Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:

$C^2 = (12\ m)^2 - (8\ m)^2$

$C^2 = 144\ m^2 - 64\ m^2$

$C^2 = 80\ m^2$

- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior.

$C = \sqrt{80\ m^2} =$

Como en este caso 80 no tiene raíz cuadrada exacta, procederemos entonces a descomponer este valor en sus factores primos para así obtener su valor sin decimales.

$$\begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

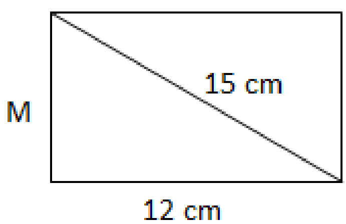
$$\sqrt{2^2 \, . \, 2^2 . \, 5} \rightarrow$$

Cómo es una raíz cuadrada, todos los valores que estén a la 2 salen de la raíz, los demás quedan entre la raíz.

$$2.\,2.\sqrt{5} \rightarrow 4\sqrt{5}$$

✓ Finalmente el valor obtenido ($4\sqrt{5}$ mm) es el valor de la sombra del árbol.

2. Calcular el valor de ***M*** en el siguiente rectángulo:



<u>Solución:</u>

✓ En este caso podemos observar como en el rectángulo al trazar la diagonal se forman dos triángulos rectángulos, siendo la diagonal (15 cm) el valor que corresponde a la hipotenusa, por lo tanto ***M*** corresponde a un cateto.

✓ Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:

$M^2 = (15\text{ cm})^2 - (12\text{ cm})^2$

$M^2 = 225\text{ cm}^2 - 144\text{ cm}^2$

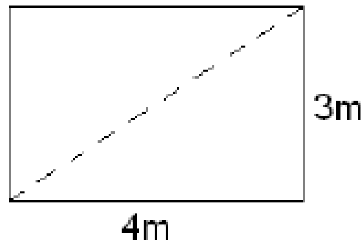
$M^2 = 81\text{ cm}^2$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior

$M= \sqrt{81\ cm^2} = 9$ cm

✓ Finalmente el valor obtenido (9 cm) es el valor de M.

3. El dormitorio de Pablo es rectangular, y sus lados miden 3 y 4 metros. Ha decidido dividirlo en dos partes triangulares con una cortina que une dos vértices opuestos. ¿Cuántos metros deberá medir la cortina?



Solución:

- ✓ En este caso podemos observar como en el rectángulo al trazar la diagonal se forman dos triángulos rectángulos, siendo la diagonal el valor que corresponde a la hipotenusa, por lo tanto denominaremos ***h*** el valor a encontrar.

- ✓ Para calcular la hipotenusa se suman los cuadrados de los catetos:

$H^2 = (4\ m)^2 + (3\ m)^2$

$H^2 = 16\ m^2 + 9\ m^2$

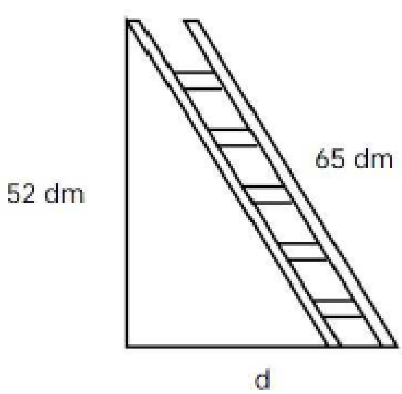
$H^2 = 25\ m^2$

- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos.

$H = \sqrt{25\ m^2} = 5\ m$

- ✓ Finalmente el valor obtenido (5 m) es el valor de la cortina.

4. Una escalera de 65 dm está apoyada en una pared vertical a 52 decímetros del suelo. ¿A qué distancia se encuentra de la pared el pie de la escalera?



Solución:

- ✓ En este caso podemos observar como se forma un triángulo rectángulo entre la pared y el pie de la escalera, siendo la escalera el valor correspondiente a la hipotenusa ya que queda frente al ángulo recto, por lo tanto el valor de ***d***, corresponde a un cateto.

- ✓ Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:

$D^2 = (65\ dm)^2 - (52\ dm)^2$

$D^2 = 4225\ dm^2 - 2704\ dm^2$

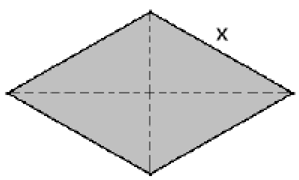
$D^2 = 1521\ dm^2$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior

$D = \sqrt{1521\ dm^2} = 39\ dm$

- ✓ Finalmente el valor obtenido (39 dm) es el valor que corresponde a la distancia que hay entre la pared y el pie de la escalera.

5. Calcula la medida de cada lado de un rombo, sabiendo que sus diagonales miden 12 y 16 centímetros.



Solución:

- ✓ En este caso podemos observar como las diagonales dividen al rombo en 4 triángulos rectángulos, formándose en el centro los ángulos rectos, por lo tanto ***X*** corresponde al valor de la hipotenusa y los lados serán iguales a la mitad de las diagonales.

- ✓ Para calcular la hipotenusa se suman los cuadrados de los catetos:

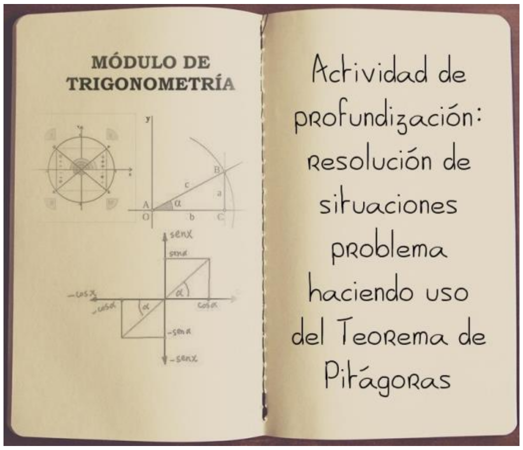
$X^2 = (6\ cm)^2 + (8\ cm)^2$

$X^2 = 36\ cm^2 + 64\ cm^2$

$X^2 = 100\ cm^2$

- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos.

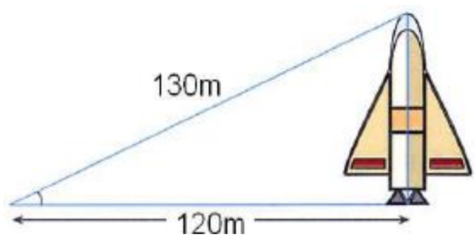
$X = \sqrt{100\ cm^2} = 10$ cm, que es el valor de ***X***



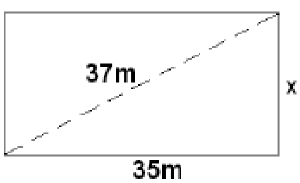
ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

Haciendo uso del teorema de Pitágoras solucionar los siguientes ejercicios, dejando consignado el procedimiento.

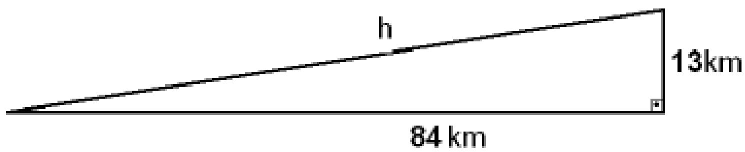
1. Calcular la medida del cohete.



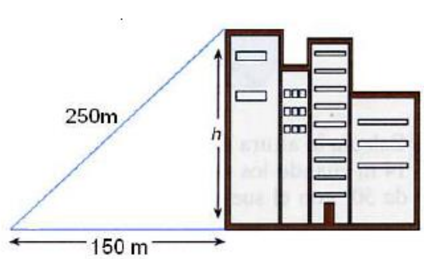
2. Hallar el valor de "X"



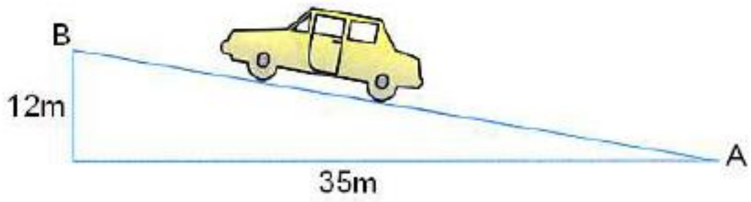
3. Una rampa tiene una longitud horizontal de 84 kilómetros y un altura de 13 km. ¿Cuál es la longitud de la rampa?



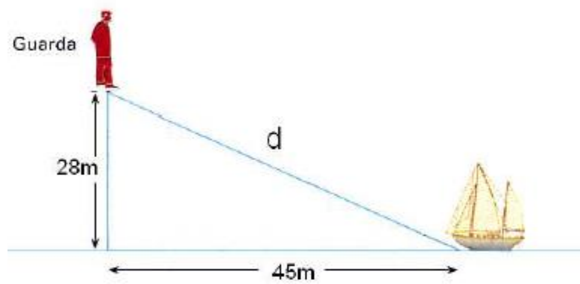
4. Si nos situamos a 150 metros de distancia de un rascacielos, la visual al extremo superior del mismo recorre un total de 250 metros. ¿Cuál es la altura total del rascacielos?



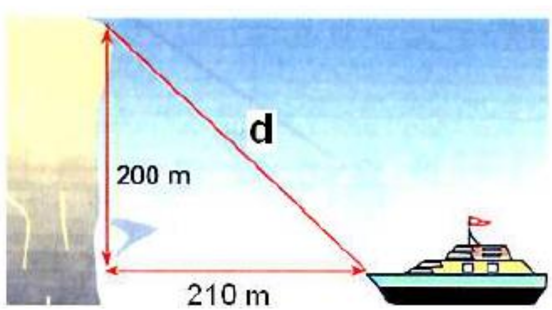
5. Un coche que se desplaza desde el punto A hasta el punto B recorre una distancia horizontal de 35 metros, mientras se eleva una altura de 12 metros. ¿Cuál es la distancia, en metros, que separa a los puntos A y B?



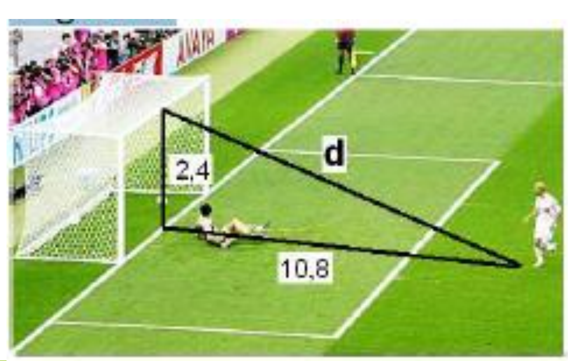
6. Un guardacostas observa un barco desde una altura de 28 metros. El barco está a una distancia horizontal del punto de observación de 45 metros. ¿Cuál es la longitud, en metros, de la visual del guardacostas al barco?



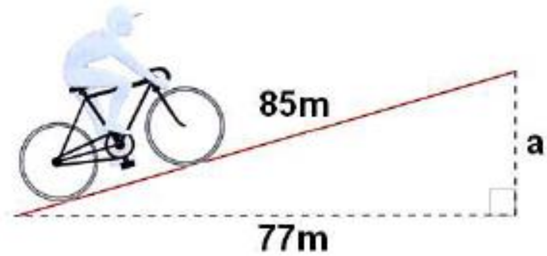
7. Desde un acantilado de 200 metros de altura se observa un barco que se encuentra a 210 metros de dicho acantilado. ¿Qué distancia, en metros, recorre la visual desde el acantilado hasta el barco?



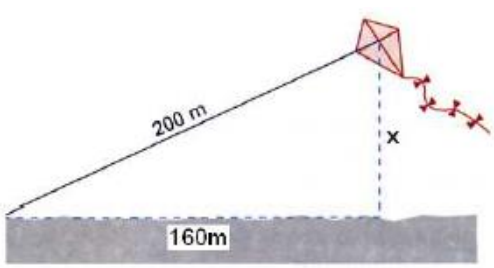
8. La altura de una portería de fútbol reglamentaria es de 2,4 metros y la distancia desde el punto de penalti hasta la raya de gol es de 10,8 metros. ¿Qué distancia recorre un balón que se lanza desde el punto de penalti y se estrella en el punto central del larguero?



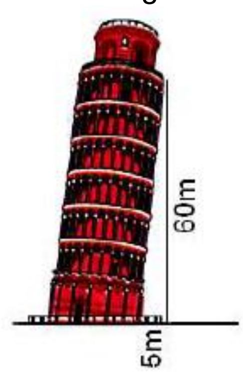
9. En una rampa inclinada, un ciclista avanza una distancia real de 85 metros mientras avanza una distancia horizontal de tan solo 77 metros. ¿Cuál es la altura, en metros, de esa rampa?



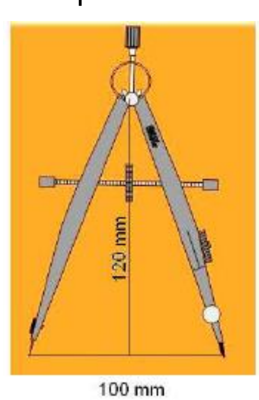
10. Una cometa está atada al suelo con un cordel de 200 metros de longitud. Cuando la cuerda está totalmente tensa, la vertical de la cometa al suelo está a 160 metros del punto donde se ató la cometa. ¿A qué altura está volando la cometa?



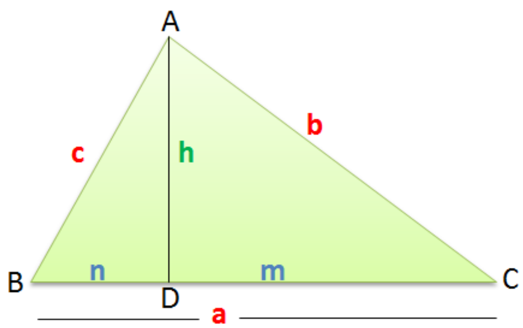
11. La Torre de Pisa está inclinada de modo que su pared lateral forma un triángulo rectángulo de catetos 5 metros y 60 metros. ¿Cuánto mide la pared lateral?



12. Un compás de bigotera tiene separadas las puntas de sus patas 100 milímetros, mientras que la vertical desde el eje hasta el papel alcanza una altura de 120 milímetros. ¿Cuál es la medida, en milímetros, de cada una de sus patas?



TEOREMA DEL CATETO



En un triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre la misma, donde **"a"** es la hipotenusa. En todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella. El teorema del cateto nos muestra la relación entre los catetos y los segmentos que determina la altura sobre la hipotenusa.

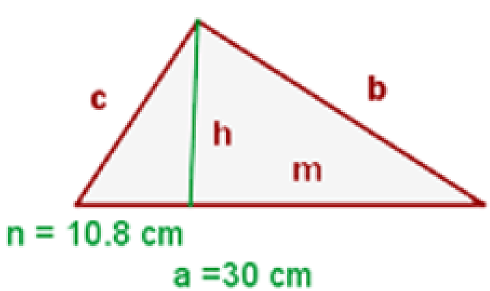
En el triángulo anterior "**b**" y "**c**" son los catetos, "**a**" es la hipotenusa, "**m**" y "**n**" son las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa. De acuerdo a esto podemos establecer la fórmula para hallar el valor de los catetos, teniendo en cuenta la media proporcional.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Longrightarrow b^2 = a.m$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Longrightarrow c^2 = a.n$$

EJEMPLOS:

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 cm y la proyección de un cateto sobre ella 10.8 cm. Hallar el otro cateto.



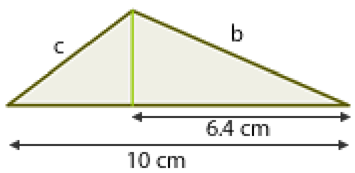
$$\frac{c}{30} = \frac{10.8}{c}$$

$$c = \sqrt{30 \cdot 10.8}$$

$$c^2 = 30 \cdot 10.8$$

$$c = 18\ cm$$

2. La hipotenusa de un triángulo rectángulo, *a*, mide 10 cm y la proyección de su cateto *b* sobre ella es de 6.4 cm.



¿Cuál es la medida del cateto *b*?

Solución:

✓ Para hallar el cateto b se establece primero la relación de proporción y se calcula la incógnita:

$$\frac{10\text{ cm}}{\text{b}} = \frac{\text{b}}{6{,}4\text{ cm}} \Rightarrow \text{b}^2 = 10.\,6{,}4\text{ cm} \Rightarrow \text{b} = \sqrt{64\ cm^2} \Rightarrow \text{b} = 8\ cm$$

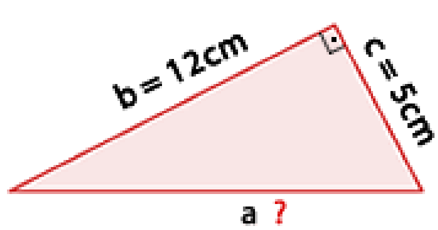
¿Cuánto mide el cateto *c*?

✓ Para hallar el cateto c se establece primero la relación de proporción y se calcula la incógnita:

$$\frac{10\text{ cm}}{c} = \frac{\text{c}}{3{,}6\text{ cm}} \Rightarrow \text{c}^2 = 10.\,3{,}6\text{ cm} \Rightarrow \text{c} = \sqrt{36\ cm^2} \Rightarrow \text{c} = 6\ cm$$

El valor de 3,6 cm de la proyección del cateto se obtiene restando a la hipotenusa (10cm) la proyección del otro cateto (6,4 cm).

3. El cateto *b* de un triángulo rectángulo mide 12 cm y el cateto *c*,5 cm.



a. ¿Cuál es la medida de la hipotenusa, *a*, de este triángulo?

- ✓ Lo primero que se debe tener en cuenta es identificar que el valor de “a” corresponde a la hipotenusa, por quedar frente al ángulo recto.

- ✓ Para calcular la hipotenusa se suman los cuadrados de los catetos:

$a^2 = (5\text{ cm})^2 + (12\text{ cm})^2$

$a^2 = 25\text{ cm}^2 + 144\text{ cm}^2$

$a^2 = 169\text{ cm}^2$

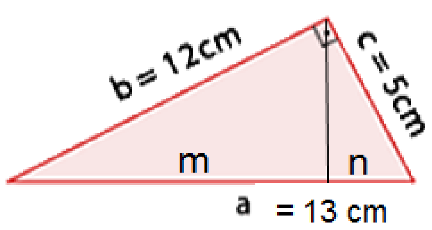
- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos.

$a = \sqrt{169\ cm^2} = 13\text{ cm}$

b. Indica la medida de las proyecciones de los catetos *b* y *c* respectivamente, redondeando a dos cifras decimales.

Solución:

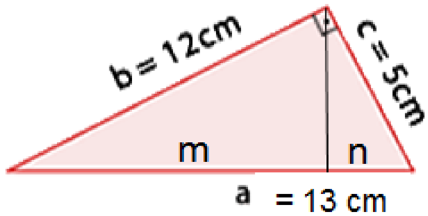
- ✓ Para hallar la proyección del cateto b se establece primero la relación de proporción y se calcula la incógnita, para ello llamaremos m a esa proyección:



$\frac{13\text{ cm}}{12\text{ cm}} = \frac{12\text{ cm}}{\text{m}}$ ⇒ m .13cm = 12cm . 12cm ⇒ m .13cm = 144 cm^2 ⇒

$\text{m} = \frac{144\ cm^2}{13\ cm}$ ⇒ m = 11,08 cm

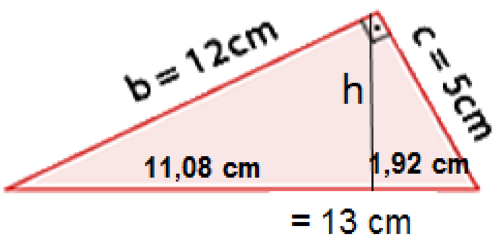
- ✓ Para hallar la proyección del cateto c se establece primero la relación de proporción y se calcula la incógnita, para ello llamaremos n a esa proyección:



$\frac{13\ \text{cm}}{5\ \text{cm}} = \frac{5\ \text{cm}}{\text{n}}$ $\rightarrow$ n .13cm = 5cm . 5cm $\rightarrow$ n .13cm = 25 cm^2 $\rightarrow$

m $= \frac{25\ cm^2}{13\ cm}$ $\rightarrow$ n = 1,92 cm

c. ¿Cuánto mide la altura de este triángulo?



- ✓ Para calcular el valor de la altura se puede observar como al trazar la línea de la altura, el triángulo queda dividido en dos triángulos rectángulos, por lo tanto se puede utilizar el teorema de Pitágoras, siendo la altura el valor correspondiente a un cateto. En este caso utilizaremos los valores del triángulo más pequeño. (5 cm y (1,92 cm)

- ✓ Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:

$C^2 = (5\ cm)^2 - (1{,}92\ cm)^2$

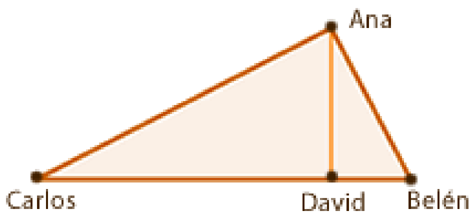
$C^2 = 25\ cm^2 - 3{,}6864\ cm^2$

$C^2 = 21{,}3136\ cm^2$

- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior.

C= $\sqrt{21{,}3136\ cm^2} \sim 4{,}62$ cm

4. Las casas de cuatro amigos se encuentran situadas como muestra la siguiente figura. Sabiendo que la distancia de la casa de Belén a la de Carlos es de 1.5 Km y la distancia de la casa de Belén a la casa de David es de 0.54 Km, calcula las distancias que faltan:



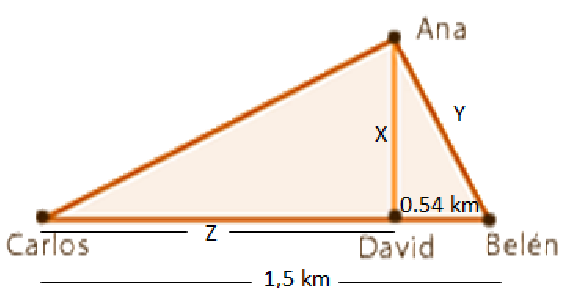
De casa de Belén a casa de Ana →

De casa de David a casa de Carlos →

De casa de Ana a casa de David →

Solución:

✓ En primer lugar se establecen las distancias y a las medidas faltantes se les asignan incógnitas.



De casa de Belén a casa de Ana →

✓ En este caso la distancia de la casa de Belén a la casa de Ana sería "Y", el valor de la hipotenusa es de 1,5 km.

Para hallar el cateto Y se establece primero la relación de proporción y se calcula la incógnita:

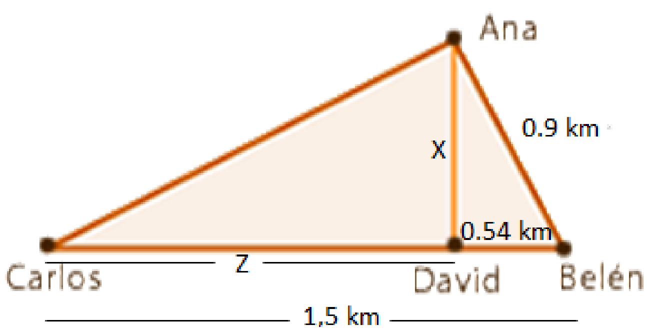
$$\frac{1{,}5\ \text{km}}{\text{Y}} = \frac{\text{Y}}{0{,}54\ \text{cm}} \Rightarrow \text{Y}^2 = 1{,}5\ \text{km}.\,0{,}54\ \text{km} \Rightarrow \text{Y} = \sqrt{0{,}81\ km^2} \Rightarrow \text{Y} = 0{,}9\ km$$

De casa de David a casa de Carlos →

- ✓ En este caso sólo sería restarle al valor de la hipotenusa (1,5 k.m) el valor de la distancia de la casa de David a la casa de Belén (0,54 km)

Z = 1,5 km - 0,54 km= 0,96 km → *Respuesta*

De casa de Ana a casa de David →



Solución:

- ✓ De acuerdo a los valores obtenidos en los procesos anteriores, se puede calcular la distancia entre la casa de Ana y la de David a través del Teorema de Pitágoras, siendo esta distancia el valor correspondiente a un cateto:

- ✓ Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:

$C^2 = (0,9 \text{ km})^2 - (0,54 \text{ km})^2$

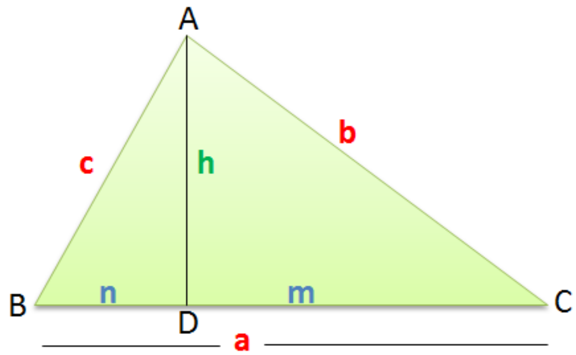
$C^2 = 0,81 \text{ km}^2 - 0,2916 \text{ km}^2$

$C^2 = 0,5184 \text{ km}^2$

- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior.

$C= \sqrt{0,5184\ km^2} = 0,72 \text{ km}$

TEOREMA DE LA ALTURA



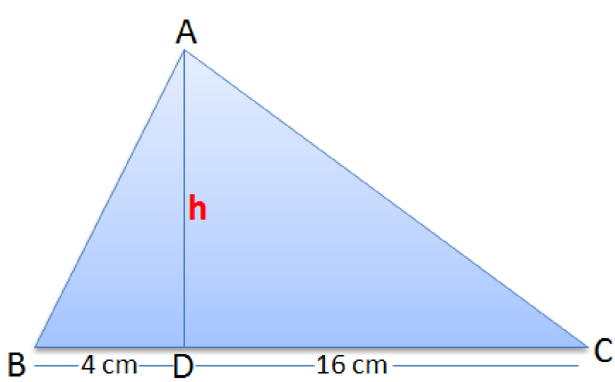
El **teorema de la altura** nos da la relación en un triángulo de la **altura** sobre la hipotenusa y los segmentos que determina sobre la misma o proyecciones. Dice así: "En un triángulo rectángulo el cuadrado de la **altura** sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa."

En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos que divide a esta:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m.n$$

EJEMPLOS:

1. Calcular el valor de la altura (***h***) en el siguiente triángulo:



Solución:

Cuando se conoce el valor de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, para calcular la altura se realiza el siguiente procedimiento:

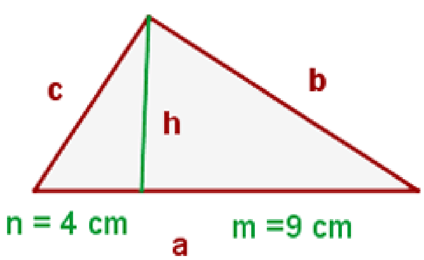
✓ Se multiplican los valores de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, en este caso los valores valen 4 cm y 16 cm.

$$h = 4\ cm \times 16\ cm \Longrightarrow h^2 = 64\ cm^2$$

✓ Al resultado de esta multiplicación se le saca raíz cuadrada

$$h = \sqrt{64\ cm^2} = 8\ cm$$

2. En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 4 y 9 centímetros. Calcular la altura relativa a la hipotenusa.



Solución:

Cuando se conoce el valor de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, para calcular la altura se realiza el siguiente procedimiento:

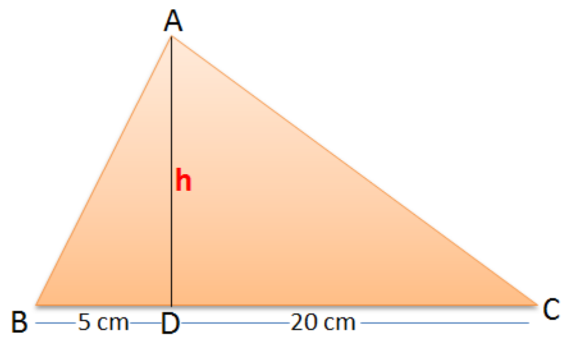
✓ Se multiplican los valores de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, en este caso los valores valen 4 cm y 16 cm.

$$h = 4\ cm \times 9\ cm \Longrightarrow h^2 = 36\ cm^2$$

✓ Al resultado de esta multiplicación se le saca raíz cuadrada

$$h = \sqrt{36\ cm^2} = 6\ cm$$

3. En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 5 cm y 20 cm. Calcular la altura relativa a la hipotenusa.



Solución:

Cuando se conoce el valor de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, para calcular la altura se realiza el siguiente procedimiento:

- ✓ Se multiplican los valores de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, en este caso los valores valen 5 cm y 20 cm.

$$h = 5\ cm\ \times 20\ cm \qquad h^2 = 100\ cm^2$$

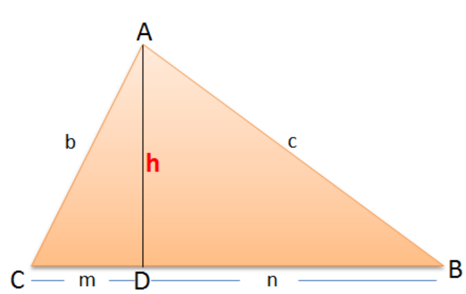
- ✓ Al resultado de esta multiplicación se le saca raíz cuadrada

$$h = \sqrt{100\ cm^2} = 10\ cm$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN TEOREMAS DE PITÁGORAS, CATETO Y ALTURA

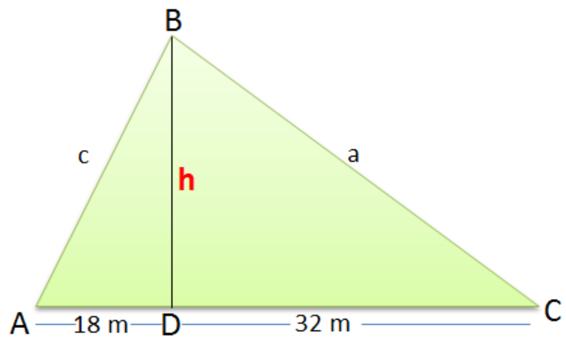
Resolver los siguientes triángulos rectángulos haciendo uso de los teoremas de Pitágoras, cateto y altura.

1. En el triángulo hallar los valores de a, b y c.

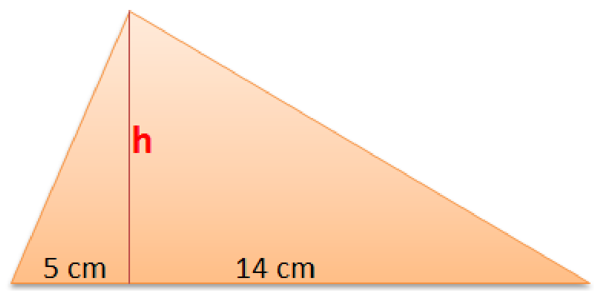


m = 1,8 n= 3,2

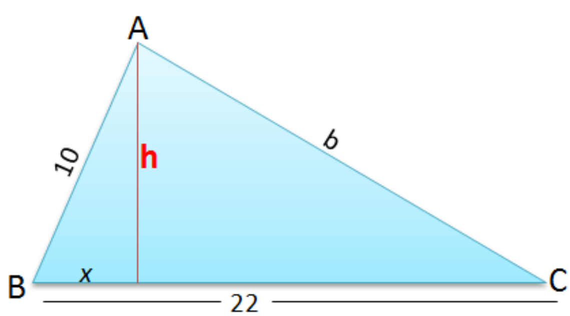
2. En el triángulo hallar los valores de h, a y c



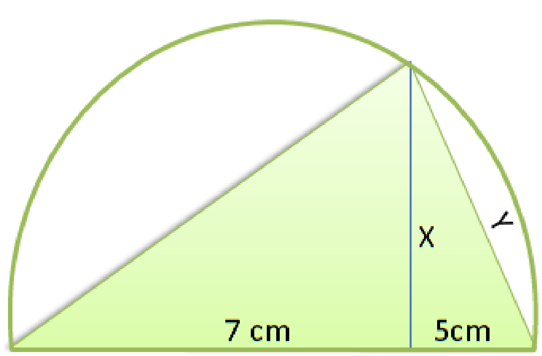
3. En un triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta con longitudes de 5 cm y 14 cm. Hallar la longitud de dicha altura.



4. En el triángulo calcular el valor de "***x***" y "***h***".



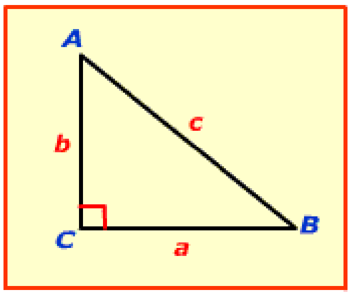
5. En la figura calcular el valor de "***x***" y "**y**".



TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS ESPECIALES

Se consideran triángulos especiales en el estudio de la trigonometría, aquellos que tienen como ángulos 45°- 45° - 90° y 30° - 60° - 90°.

Teorema del triángulo rectángulo Isósceles (45° - 45° - 90°)



En un triángulo recto isósceles, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ más larga que la longitud de cada cateto, o sea, es el resultado de la multiplicación de la medida de uno de los catetos por $\sqrt{2}$.

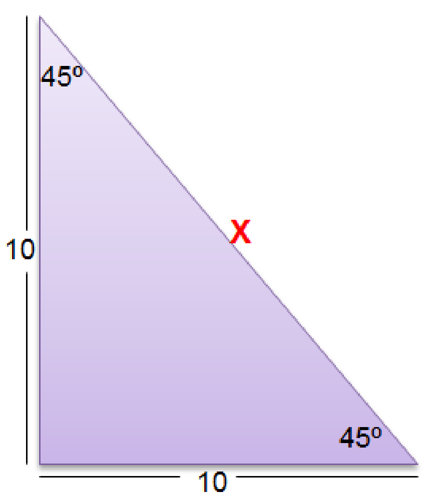
a = b

c = a$\sqrt{2}$ y c= b$\sqrt{2}$, ya que a = b

Por lo tanto, a$\sqrt{2}$ = b$\sqrt{2}$ por ser un triángulo isósceles

Ejemplos:

1. En el siguiente triángulo rectángulo hallar el valor de la hipotenusa.

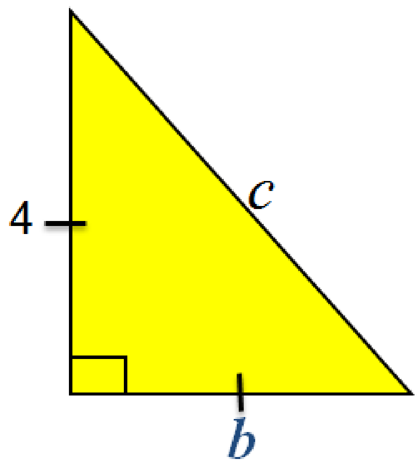


Solución:

- ✓ *Como se trata de un triángulo rectángulo isósceles, para calcular la hipotenusa (X) sólo es necesario multiplicar el valor de uno de sus lados por $\sqrt{2}$*

***X** = 10$\sqrt{2}$*

2. Encontrar la medida de las variables en el siguiente triángulo rectángulo isósceles:

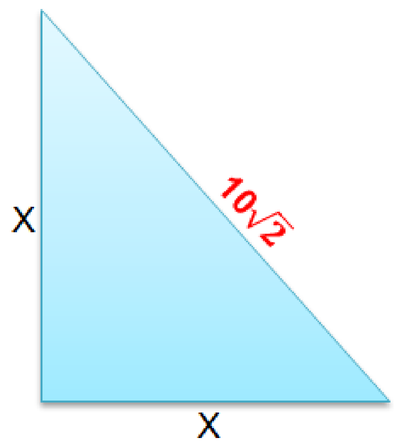


Solución:

- ✓ *Como se trata de un triángulo rectángulo isósceles, para calcular las variables sólo es necesario:*
- ✓ *b=4, porque ambos catetos tienen la misma medida.*
- ✓ *Para calcular la hipotenusa (C) sólo es necesario multiplicar el valor de uno de sus lados por* $\sqrt{2}$

$C = 4\sqrt{2}$

3. Hallar la medida de los catetos en el siguiente triángulo rectángulo isósceles.



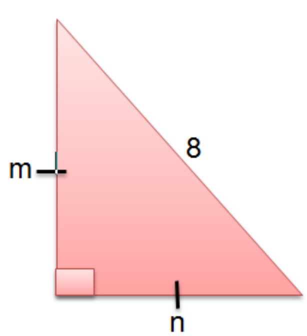
Solución:

- ✓ *Como se trata de un triángulo rectángulo isósceles, el valor de la hipotenusa sería:*
  $h = x.\sqrt{2}$,
- ✓ *En este ejercicio* $h = 10\sqrt{2}$
- ✓ *por lo tanto para calcular el valor del cateto se despeja el valor de la incógnita en la ecuación:*

$$h = x.\sqrt{2} \Rightarrow X = \frac{h}{\sqrt{2}} \Rightarrow X = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

- ✓ *por lo tanto simplificando en la fracción* $\sqrt{2}$, *el valor de la* $X = 10$

4. Hallar la medida de las variables m y n en el siguiente triángulo rectángulo isósceles:



Solución:

- ✓ *Como se trata de un triángulo isósceles, las variables m y n tienen el mismo valor y corresponden a un cateto.*
- ✓ *para calcular el valor del cateto se despeja el valor de la incógnita en la ecuación:*

$\color{red}{h} = m.\sqrt{2}$ ⟶ $m = \dfrac{\color{red}{h}}{\sqrt{2}}$ ⟶ $\color{blue}{m=} \dfrac{8}{\sqrt{2}}$

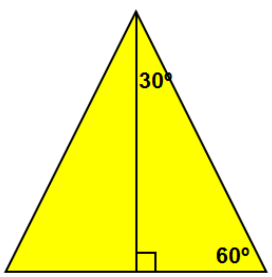
En este caso como el valor de m tiene en el denominador una raíz se recomienda que se racionalice el denominador.

$$\frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

✓ *por lo tanto el valor de la* ***m=*** $4\sqrt{2}$

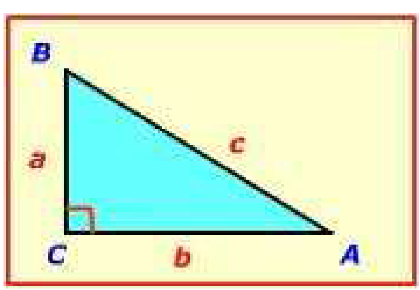
Teorema relacionado con los triángulos (30° - 60° - 90°)

Un triángulo de 30° - 60° - 90° resulta después de cortar a la mitad un triángulo equilátero:



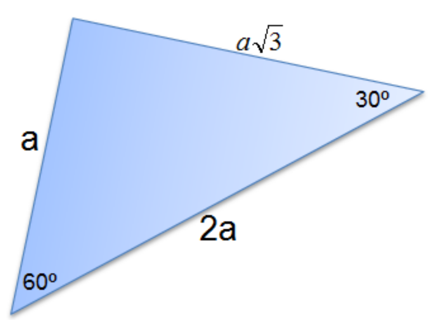
En un triángulo de 30º - 60º - 90º la medida de la hipotenusa es dos veces mayor que la medida del cateto de menor longitud, y la longitud del cateto mayor es $\sqrt{3}$ más grande que la longitud del cateto menor.

Suponga que a < b, entonces;



c = 2a

b = a$\sqrt{3}$



En un triángulo de 30° - 60° - 90° se puede observar que hay un ángulo más grande que otro y por lo tanto hay un lado mayor que otro. Por lo tanto, otra forma de identificar fácilmente los catetos y sus medidas es que el lado más corto queda frente al ángulo menor y el cateto de mayor medida queda frente al ángulo de 60°

Cateto Largo= $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \boldsymbol{hipotenusa}$

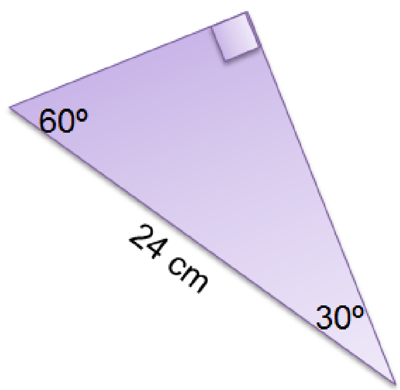
Cateto Largo= $\sqrt{3} \times \boldsymbol{Cateto\ Corto}$

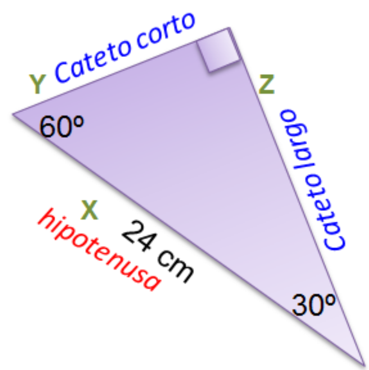
Cateto Corto= $\dfrac{\boldsymbol{hipotenusa}}{\mathbf{2}}$

Cateto Corto= $\dfrac{\boldsymbol{Cateto\ Largo}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$

Ejemplos:

1. En el siguiente triángulo hallar la medida del cateto y la hipotenusa:





Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la medida de los catetos es proporcional al valor de su ángulo, por lo tanto el cateto más largo queda frente al ángulo mayor y el cateto más corto queda frente al ángulo menor.*

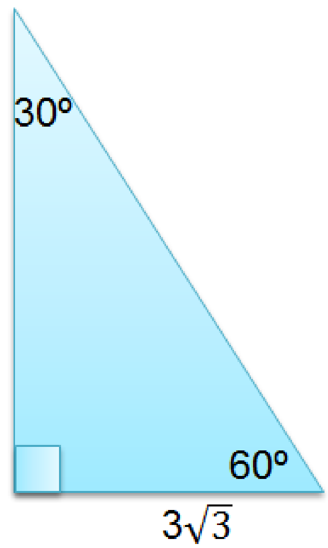
- ✓ *Como se conoce el valor de la hipotenusa (24 cm), el valor del cateto corto (Y) es igual a la mitad, es decir 12 cm*

  Y= $\dfrac{24\ cm}{\mathbf{2}}$ **= 12 cm**

- ✓ *Para calcular el cateto más largo (Z) se puede realizar con el valor de la hipotenusa o con el valor del cateto más corto, en este caso es un poco más sencillo hacerlo con el valor del cateto corto:*

  Z = 12 cm x $\sqrt{3}$ = **12$\sqrt{3}$ cm**

2. En el siguiente triángulo hallar la medida del cateto y la hipotenusa



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la medida de los catetos es proporcional al valor de su ángulo, por lo tanto el cateto más largo queda frente al ángulo mayor y el cateto más corto queda frente al ángulo menor.*

- ✓ *Como se conoce el valor del cateto más corto ($3\sqrt{3}$), el valor de la hipotenusa es igual al doble del cateto corto*

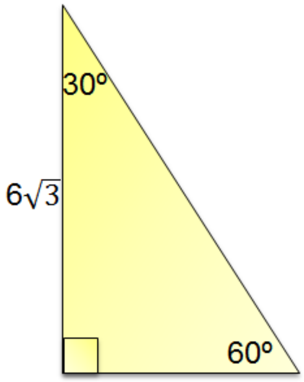
Hipotenusa= *2. ($3\sqrt{3}$),* **= $6\sqrt{3}$**

- ✓ *Para calcular el cateto más largo se puede realizar con el valor de la hipotenusa o con el valor del cateto más corto, en este caso es un poco más sencillo hacerlo con el valor del cateto corto:*

Cateto largo = $\sqrt{3} \times \boldsymbol{Cateto\ Corto}$

= $\sqrt{3} \times (3\sqrt{3}) = 3\sqrt{9} = 3 \times 3 = 9$

3. En el siguiente triángulo hallar la medida del cateto y la hipotenusa



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la medida de los catetos es proporcional al valor de su ángulo, por lo tanto el cateto más largo queda frente al ángulo mayor y el cateto más corto queda frente al ángulo menor.*

- ✓ *Como se conoce el valor del cateto más largo ($6\sqrt{3}$), se puede calcular el valor del otro cateto (cateto corto).*

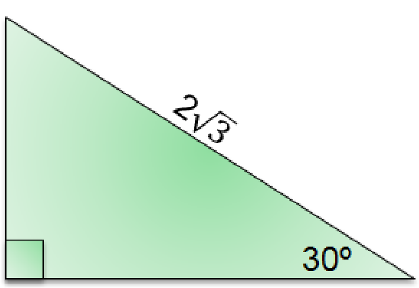
Cateto Corto= $\dfrac{\boldsymbol{Cateto\ Largo}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$ Cateto Corto= $\dfrac{6\sqrt{3}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$

- ✓ *Simplificando $\sqrt{3}$, el valor del cateto será igual a* ***6***

- ✓ *Para calcular la hipotenusa se multiplica el cateto corto por 2, teniendo en cuenta que la hipotenusa es el doble de este valor.*

  Hipotenusa= *2. (6),* **= 12**

4. En el siguiente triángulo hallar la medida de los catetos:



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la medida de los catetos es proporcional al valor de su ángulo, por lo tanto el cateto más largo queda frente al ángulo mayor y el cateto más corto queda frente al ángulo menor.*

- ✓ *Como se conoce el valor de la hipotenusa, se puede empezar calculando el valor del cateto más corto:*

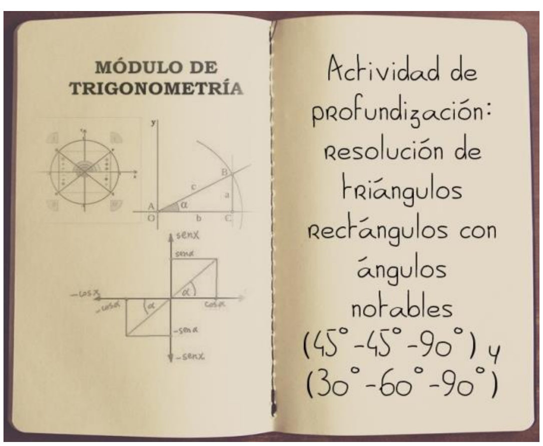
Cateto Corto= $\dfrac{\boldsymbol{hipotenusa}}{\mathbf{2}}$ = Cateto Corto= $\dfrac{2\sqrt{3}}{\mathbf{2}}$

- ✓ *Simplificando* 2, *el valor del cateto será igual a* $\mathbf{\sqrt{3}}$

- ✓ *Para calcular el cateto más largo se puede realizar con el valor de la hipotenusa o con el valor del cateto más corto, en este caso es un poco más sencillo hacerlo con el valor del cateto corto:*

Cateto largo = $\sqrt{\mathbf{3}} \times \boldsymbol{Cateto\ Corto}$

= $\sqrt{\mathbf{3}} \times (\sqrt{\mathbf{3}}) = \sqrt{\mathbf{9}} = \mathbf{3}$

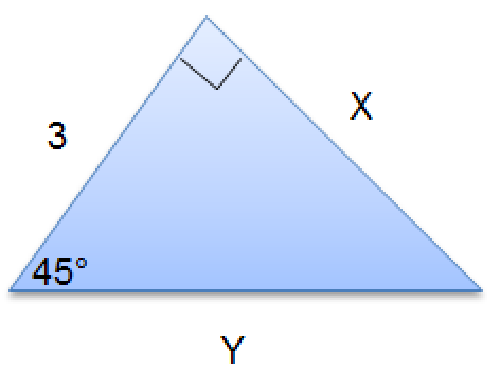


ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

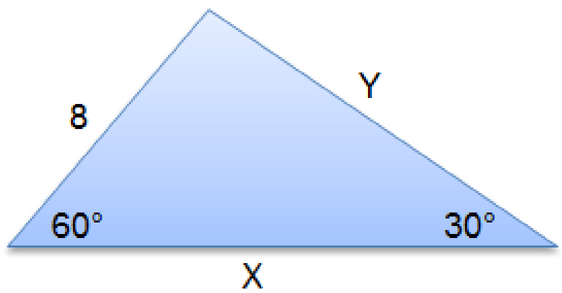
Haciendo uso de los teoremas para triángulos rectángulos de 45° - 45° - 90° y 30° - 60° - 90°, solucionar los siguientes ejercicios, dejando consignado el procedimiento.

1. Hallar la longitud de los valores x, y

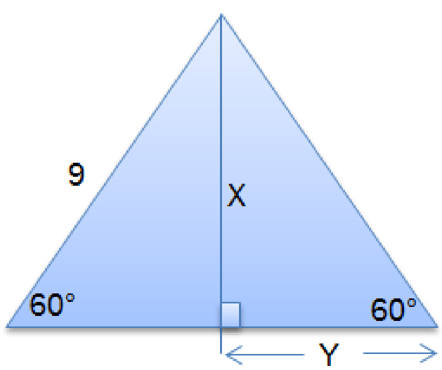
A)



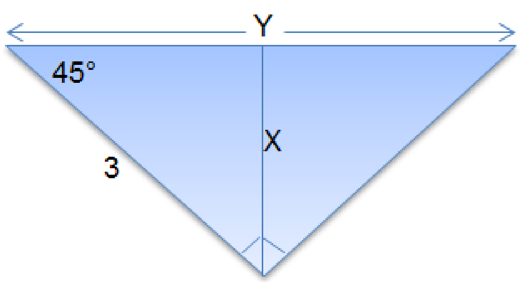
B)



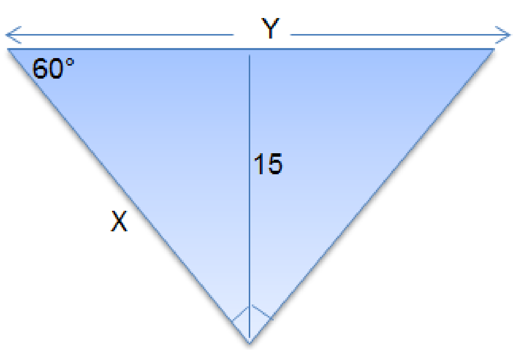
C)



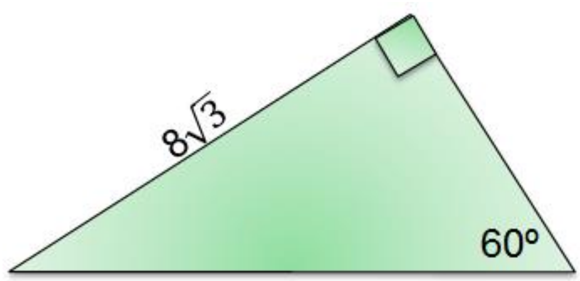
D)



E)



2. La longitud de una diagonal de un cuadrado mide $10\sqrt{2}$ cm. Hallar la medida de la longitud de un lado del cuadrado.
3. La longitud de una altura de un triángulo equilátero es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Encontrar la longitud de un lado del triángulo.
4. El perímetro de un cuadrado es 44 metros. Hallar la longitud de la diagonal del cuadrado.
5. La longitud de un lado de un cuadrado es 13 cm. Hallar la longitud de la diagonal.
6. La longitud de un lado de un triángulo equilátero es $6\sqrt{3}$ metros. Hallar la longitud de una altura del triángulo.
7. La longitud de una altura de un triángulo equilátero es 12 cm. Hallar la longitud de un lado del triángulo.
8. El perímetro de un triángulo equilátero es 39 cm. Hallar la longitud de una altura del triángulo.
9. En el siguiente triángulo hallar el valor de los lados desconocidos:



10. En el siguiente triángulo hallar el valor de los lados desconocidos: