PLANEADOR DE CLASE

Docente: **María Cristina Marín Valdés**

I.E.E.F.B

PRESENTACIÓN:

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es 'la medición de los triángulos'. Es la parte de la matemática que establece la relación entre los ángulos y los lados de un triángulo, siendo fundamental esta relación para la resolución de problemas relacionados al cálculo de las magnitudes y medidas de lados y ángulos de triángulos semejantes y también de polígonos, ya que todos los polígonos se pueden dividir en un número determinado de triángulos, por ser el triángulo polígono de menor número de lados. Posee numerosas aplicaciones, entre las que se encuentran: las técnicas de triangulación, usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, medición de distancias entre puntos geográficos, entre otros. La trigonometría es de mucha utilidad en la ingeniería civil y en arquitectura.

Este el módulo de trigonometría está dividido en diferentes capítulos, y en esta primera parte se trabajarán conceptos básicos de sistemas de medición de ángulos y el concepto del triángulo rectángulo y la aplicación de diferentes teoremas para su solución. La metodología empleada es una conceptualización narrativa explicativa, que posibilita al estudiante una clara comprensión de los conceptos estudiados, además de permitirle dosificar su nivel de apropiación y un avance gradual de acuerdo a su ritmo de aprendizaje, favoreciendo el trabajo en equipo y la autonomía. Posee más de 200 ejercicios entre ejemplos y actividades de profundización que favorecen la realimentación continua de cada una de las temáticas.

El presente esquema de unidad te permitirá observar con claridad los contenidos, logros y estrategias evaluativas que se emplearan durante el desarrollo de las guías de aprendizaje correspondientes al primer período del año 2022.

ESQUEMA DE UNIDAD

TRIGONOMETRÍA

TEMÁTICAS BÁSICAS

- Sistemas de medición de ángulos.
- Triángulos rectángulos y teoremas.
- Razones trigonométricas.
- Triángulos oblicuángulos.
- Identidades trigonométricas.
- Ecuaciones trigonométricas

ACTIVIDADES METODOLÓGICAS

- Desarrollo de talleres.
- Realización de actividades en plataforma kahoot.
- Realización de actividades en plataforma Khan academy.
- Evaluaciones escritas.
- Realización de actividades complementarias

LOGROS

Aplica las funciones trigonométricas en la solución de situaciones que requieran el uso de triángulos rectángulos y oblicuángulos.

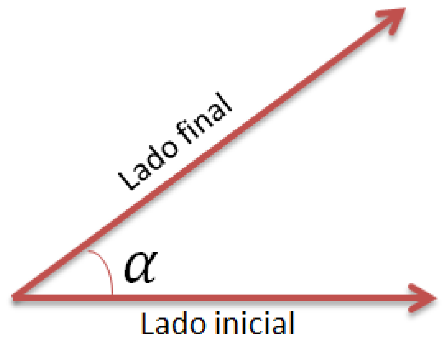
Representa gráficamente funciones trigonométricas, analizando el comportamiento y elementos principales en ejercicios propuestos.

Utiliza las identidades trigonométricas fundamentales en la verificación de otras identidades y en la solución de ecuaciones trigonométricas, dando solución a diferentes ejercicios.

SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Ángulos, medida y clasificación

<u>Ángulo:</u> un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se les llama lados y al origen común se le denomina vértice.



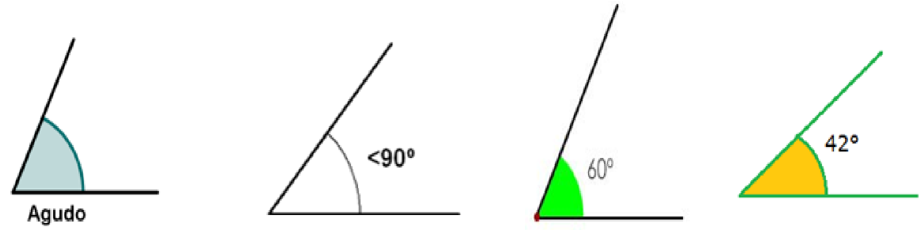
Lo que caracteriza un ángulo es la apertura de sus lados. Si los lados de un ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ están más abiertos que los de otro ángulo $\boldsymbol{\beta}$ se dice que: $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$

Dos semirrectas con origen común determinan dos ángulos distintos; el menor de ellos se llama ángulo convexo y el mayor, ángulo cóncavo.

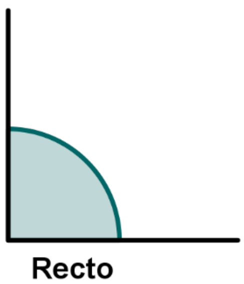
CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

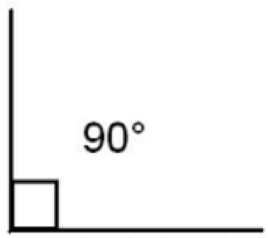
Los ángulos se clasifican y denominan en función de la medida de sus grados.

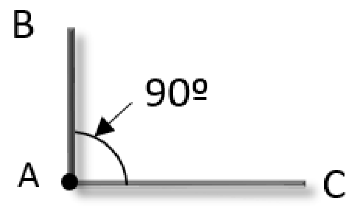
<u>Ángulo agudo</u>: es un ángulo cuya medida está entre 0° y 90°.

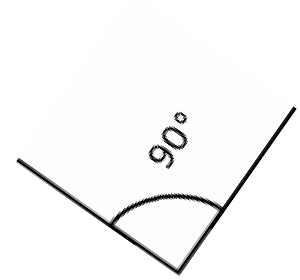


Ángulo recto: es un ángulo que mide 90°.

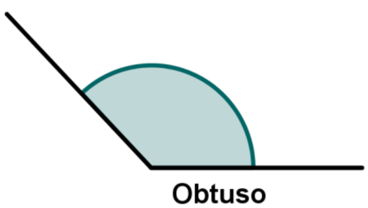


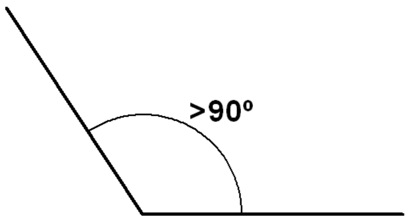


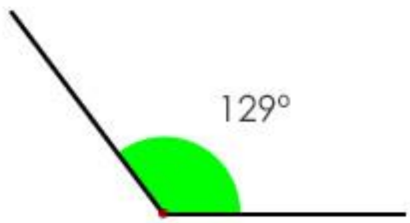




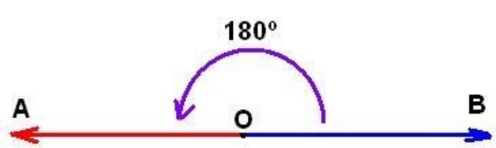
Ángulo obtuso: es un ángulo que mide más de 90°, pero menos de 180°

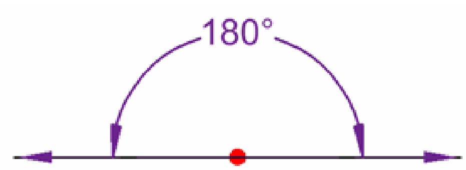




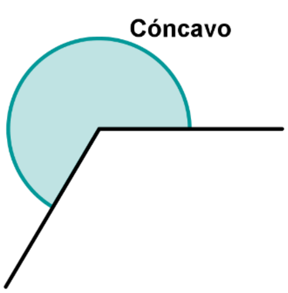


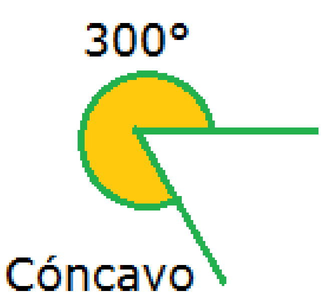
Angulo colineal o llano: es un ángulo que mide 180°

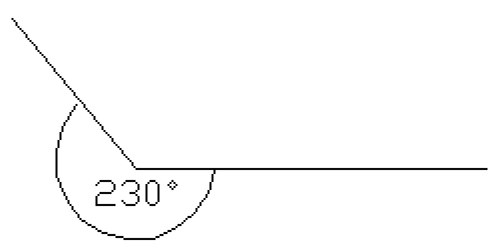




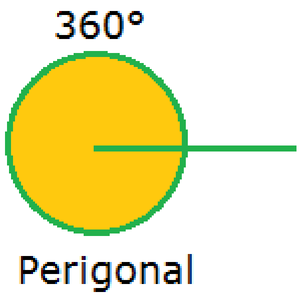
Ángulo cóncavo o entrante: es un ángulo mayor de 180° y menor de 360°

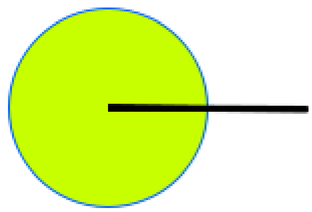


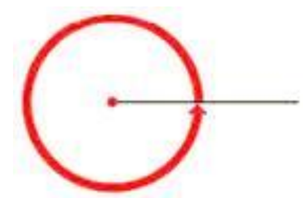




Ángulo perigonal o completo: es un ángulo que mide 360°

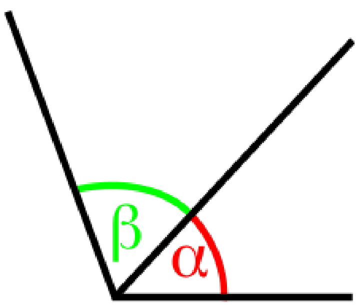


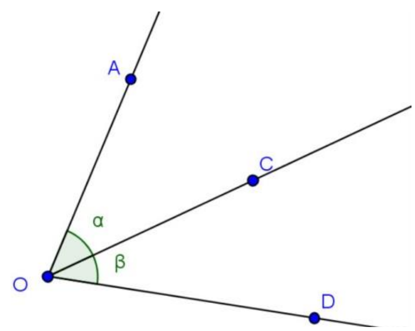


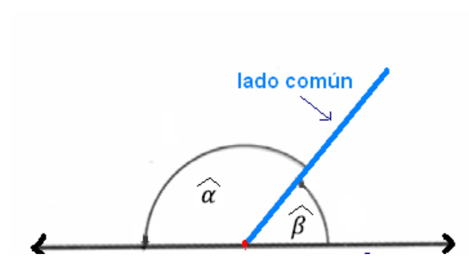


CLASIFICACIÓN CUANDO SE TIENEN DOS ÁNGULOS:

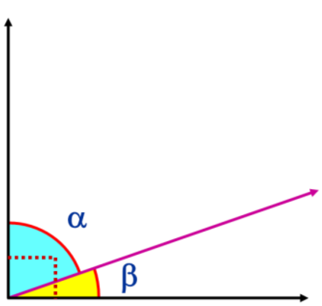
Consecutivos: Dos ángulos son consecutivos cuando tienen un lado en común y están en un mismo plano.



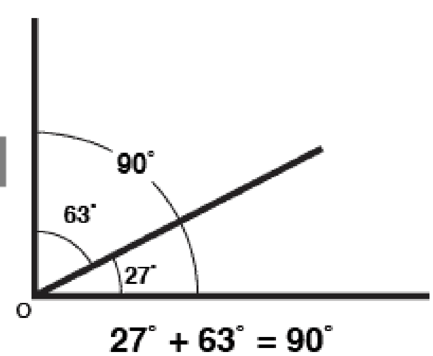


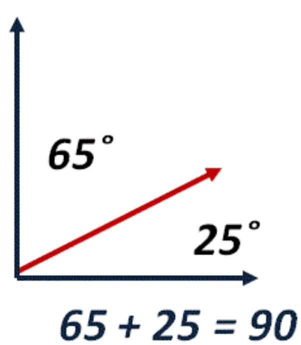


Complementarios: Son dos ángulos que suman 90°

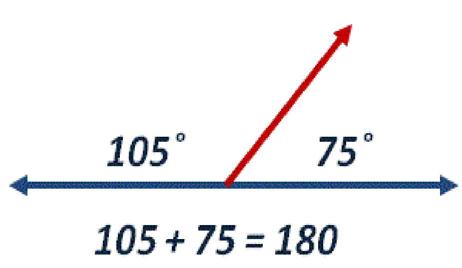


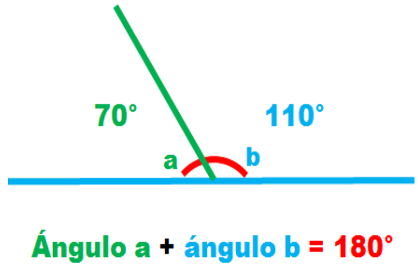
$\alpha + \beta = 90^{o}$

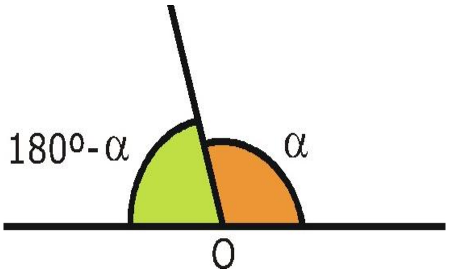




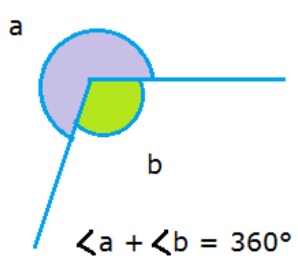
Suplementarios: Son dos ángulos que suman 180°

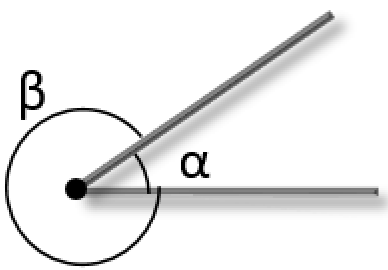


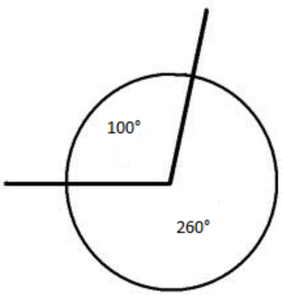




Conjugados: Son dos ángulos que suman 360°

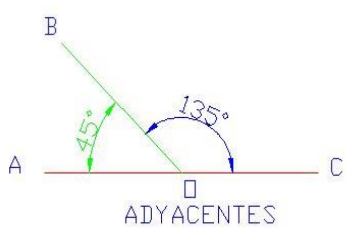


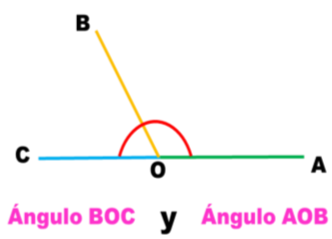


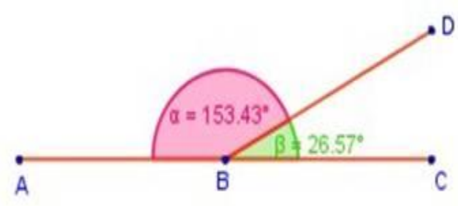


100° + 260° = 360°

Adyacentes: Son pares de ángulos consecutivos, cuya suma es igual a 180°, además estos ángulos son suplementarios.

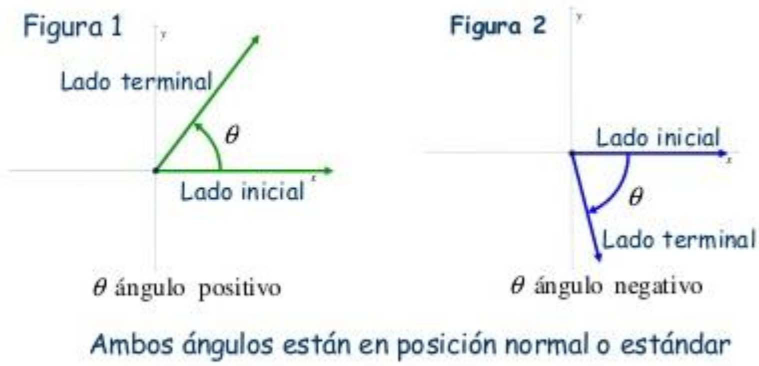






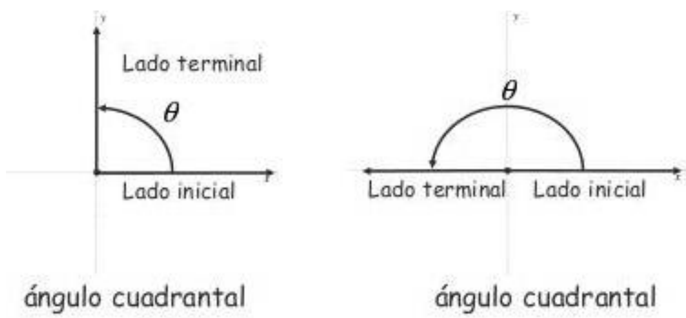
Ángulos en posición normal (estándar)

Un ángulo en un sistema de coordenadas rectangular está en la posición normal o estándar si su vértice está en el origen y su lado inicial a lo largo del eje positivo de X. Una rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj produce un ángulo positivo (Figura 1) y una rotación en el sentido de las manecillas del reloj produce un ángulo negativo (Figura 2)



Ángulos cuadrantales

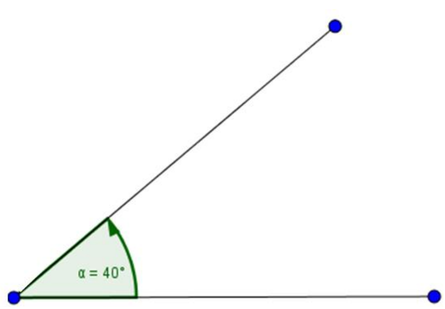
Un ángulo cuadrantal es un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal yace sobre un eje coordenado



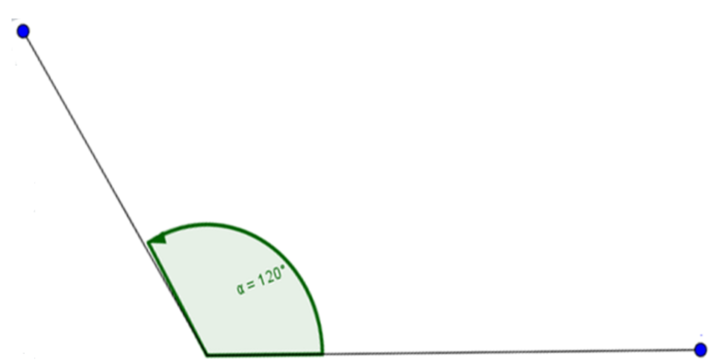
Los ángulos que miden 0°, 90°, 180°, 270° y 360° son ángulos cuadrantales (ángulos en posición estándar que su lado terminal yace sobre los ejes ***X*** o ***Y***)

EJEMPLOS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

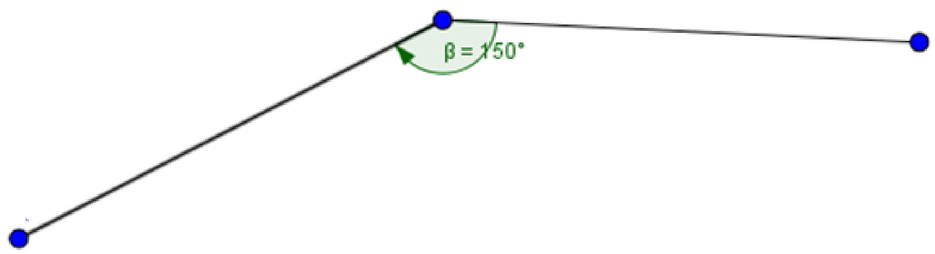
Ángulo de 40°



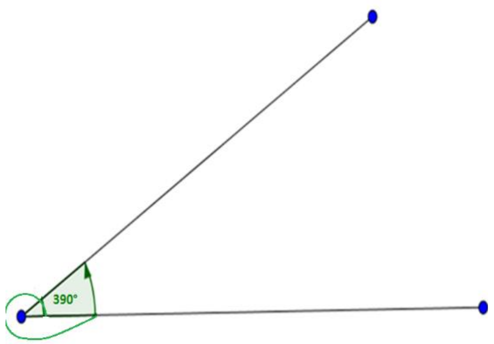
Ángulo de 120°



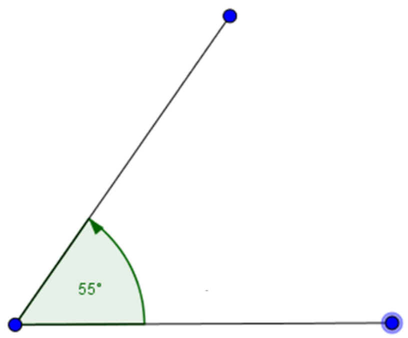
Ángulo de -150°



Ángulo de 390°



Ángulo de 55°



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN No.1:

Realizar la representación gráfica de los siguientes ángulos y determinar en cuál cuadrante se encuentran:

- 70°
- 35°
- 400°
- 790°
- -60°
- 270°
- -100°
- 180°
- -230°
- 445°
- 320°
- -270°

SISTEMA SEXAGESIMAL

El sistema sexagesimal es un **sistema de numeración en el que cada unidad se divide en 60 unidades de orden inferior**, es decir, es un sistema de numeración en **base 60.** Se aplica en la actualidad a la **medida del tiempo y a la de la amplitud de los ángulos.**

1h ⟶ 60 min ⟶ 60 seg

1° ⟶ 60 min ⟶ 60 seg

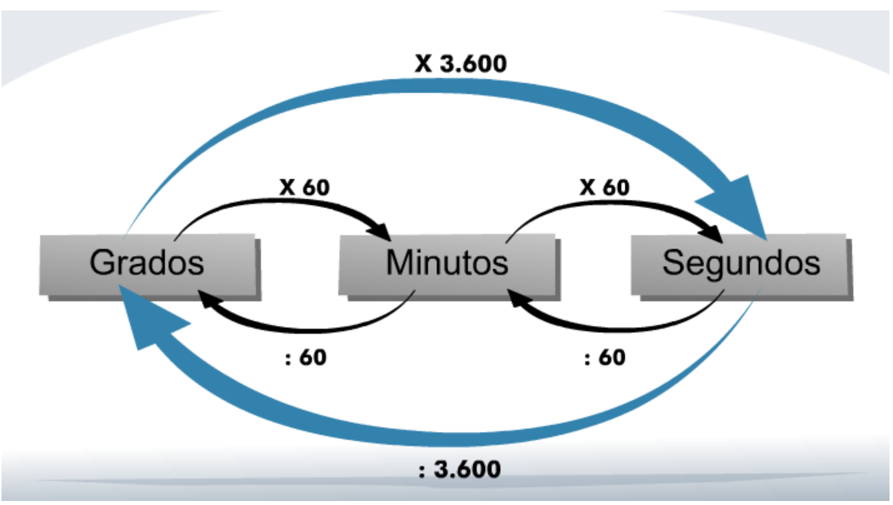
Un grado sexagesimal es la medida del ángulo con vértice en el centro del círculo, de amplitud igual a la 360- ava parte del mismo. Cada división de la circunferencia se llama grado, cada grado se considera dividido en 60 partes iguales llamadas minutos y cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos.

El grado sexagesimal es el ángulo que se obtiene al dividir la circunferencia en 360 partes iguales. Un grado sexagesimal tiene 60 minutos: 1° = 60' • Un minuto sexagesimal tiene 60 segundos: 1' = 60''

Los símbolos son:

Grados **(°)** Minutos **(')** Segundos **('')**

Para efectuar las conversiones entre este sistema de unidades se debe tener en cuenta la unidad actual y la unidad a la cual se va a pasar, si es a una unidad menor se multiplica y si es a una unidad mayor se divide.



EJEMPLOS:

1. Expresar 3800'' en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad menor (segundos) a otras mayores, tendremos que ir dividiendo por 60.

3800'' ÷ 60'' = 63 min; residuo 20'' (200 / 20'')	Primero dividimos 3800'' por 60 y así obtenemos los minutos. En este caso nos dio 63 min. El residuo que nos queda son los segundos (20''). Después dividimos los 63 minutos por 60 para poder obtener los grados.
63' ÷ 60' = 1°; residuo 3'	Al dividir los 63' por 60, se obtienen los grados y el residuo que queda serán los minutos. Por lo tanto, la Respuesta será: **1° 3' 20''**

2. Expresar 2930'' en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad menor (segundos) a otras mayores, tendremos que ir dividiendo por 60.

2930'' ÷ 60'' = 48 min; residuo 50'' (530 / 50'')	Primero dividimos 2930'' por 60 y así obtenemos los minutos. En este caso nos dio 48 min. El residuo que nos queda son los segundos (50'') Después dividimos los 48 minutos por 60 para poder obtener los grados.
48' ÷ 60' = 0°; residuo 48'	Al dividir los 48' por 60, se obtienen los grados y el residuo que queda serán los minutos. Por lo tanto, la respuesta será: **0° 48' 50''**

3. Expresar 340' en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad menor (segundos) a otra mayor, tendremos que ir dividiendo por 60.

340' ÷ 60' = 5°; residuo 40'	Como en este caso no se dio la unidad en segundos, significa que éstos son igual a cero y por lo tanto solamente se debe pasar los minutos a grados. En este caso, la respuesta será: **5° 40' 0''**

4. Expresar 810’ en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad menor (segundos) a otra mayor, tendremos que ir dividiendo por 60.

810’	60’
210	13°
30’	

Como en este caso no se dio la unidad en segundos, significa que éstos son igual a cero y por lo tanto solamente se debe pasar los minutos a grados.

Por lo tanto, la respuesta será: **13° 30’ 0’’**

5. Expresar 3,24° en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad mayor (grados) a otra menor, tendremos que ir multiplicando por 60.

3°

En primer lugar, dejaremos 3° tal y como lo enuncia el ejercicio y la parte decimal la pasaremos a minutos y segundos haciendo uso de la multiplicación.

0,24° x 60’= 14,40’

Al efectuar la multiplicación dejaremos la parte entera como los minutos (14) y la parte decimal que es igual a 0,40 la multiplicaremos por 60 segundos.

0,40’ x 60’’ = 24”

Al realizar la conversión de minutos (0,40’) a segundos, se obtiene como resultado 24’’.
Por lo tanto, la respuesta final será: **3° 14’ 24’’**

6. Expresar 2,65° en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad mayor (grados) a otra menor, tendremos que ir multiplicando por 60.

2°

En primer lugar, dejaremos 2° tal y como lo enuncia el ejercicio y la parte decimal la pasaremos a minutos y segundos haciendo uso de la multiplicación.

0,65° x 60’= 39’

Al efectuar la multiplicación observamos que no quedan decimales, por lo tanto, no hay segundos y la respuesta final será: **2° 39’ 0’’**

7. Convertir a segundos 6° 12’ 40”

Solución: Para solucionar este ejercicio podemos hacer uso de la tabla de valores descrita inicialmente, en la cual 1°= 3600’’ y 1’ = 60’’. Por lo tanto, realizaremos la conversión de cada magnitud y finalmente se efectuará la suma:

6° a segundos= 6 x 3600’’ = 21.600’’

12’ a segundos = 12 x 60’’ = **720’’**

40’’ = **40’’**

Finalmente se hace la suma de los valores: 21.600’’ + 720’’ + 40’’ y nos da como respuesta final **22.360’’**

8. Convertir a grados 960’ 1080’’

Solución: Para solucionar este ejercicio podemos hacer uso de la tabla de valores descrita inicialmente, en la cual 1°= 3600’’ y 1’ = 60’’. Por lo tanto, realizaremos la conversión de cada magnitud y finalmente se efectuará la suma:

960’ a grados= 960’ ÷ 60’ = 16°

1080’’ a grados = 1080’’ ÷ 3600’’ = **0.3°**

Finalmente se hace la suma de los valores: 16° + 0,3° y nos da como respuesta final **16,3°**

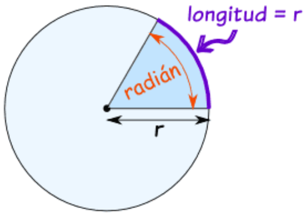
ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN No.2

Haciendo uso de las conversiones en el sistema sexagesimal, expresar los siguientes ángulos en grados, minutos y segundos.

a) 8752’’
b) 28,35°
c) 985’
d) 14050’’
e) 68,65°
f) 7800’’
g) 32,56°
h) 19,43°
i) 1984’
j) 3333’

MEDIDA ANGULAR EN RADIANES

Un ángulo también puede ser medido en radianes. Un radián es la amplitud que tiene un ángulo que subtiende un arco con la misma longitud que el radio de la circunferencia.



La longitud de la circunferencia es igual a $2.\pi.r$, por lo tanto, un ángulo completo tiene 2π radianes, un ángulo llano tiene π radianes, y un ángulo recto tiene $\frac{\pi}{2}$ radianes.

$180° = \pi\ rad$

$1\ \text{Rad} = \frac{180}{\pi}$ } Rad ⟶ Grados

$1\ \text{Grado} = \frac{\pi}{180}$ } Grados ⟶ Rad

EJEMPLOS:

1. Encontrar la medida en radianes de θ, si θ= 30°

$180° = \pi$ rad
$30° =$ x

$180° = \pi$ rad
$30° =$ x

X . 180 = π rad . 30

$X = \frac{30\pi\ \text{rad}}{180}$

Al simplificar 30 con 180 se obtiene: $\frac{1}{6}\pi$ **rad**

2. Encontrar la medida en radianes de θ, si θ= 135°

180° = π rad
135° = x

180° = π rad
135° = x

X . 180 = π rad . 135

X = $\frac{135\pi \text{ rad}}{180}$

Al simplificar 135 con 180 se obtiene: $\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi}$ **rad**

3. Encontrar la medida en radianes de θ, si θ= 210°

180° = π rad
210° = x

180° = π rad
210° = x

X . 180 = π rad . 210

X = $\frac{210\pi \text{ rad}}{180}$

Al simplificar 210 con 180 se obtiene: $\boldsymbol{\frac{7}{6}\pi}$ **rad**

4. Encontrar la medida en radianes de θ, si θ= - 150°

180° = π rad
-150° = x

180° = π rad
-150° = x

X . 180 = π rad . - 150

X = $\frac{-150\pi \text{ rad}}{180}$

Al simplificar -150 con 180 se obtiene: $\boldsymbol{\frac{-5}{6}\pi}$ **rad**

5. Encontrar la medida en grados de θ, si θ= $\frac{\pi}{6}$ rad

180° = π rad
X = $\frac{\pi}{6}$ rad

180° = π rad
X = $\frac{\pi}{6}$ rad

X . π = 180 . $\frac{\pi}{6}$

x. π rad = 30π

x = $\frac{30\pi}{\pi}$ $\longrightarrow$ X = 30°

Al simplificar 180 con $\frac{\pi}{6}$, se obtiene 30π y al simplificar

$$\frac{30\pi}{\pi} = \mathbf{30°}$$

6. Encontrar la medida en grados de θ, si θ= $\frac{11\pi}{6}$ rad

180° = π rad
X = $\frac{11\pi}{6}$ rad

180° = π rad
X = $\frac{11\pi}{6}$ rad

X . π = 180 . $\frac{11\pi}{6}$

x. π rad = 330π

x = $\frac{330\pi}{\pi}$ X = 330°

Al simplificar 180 con $\frac{11\pi}{6}$, se obtiene 330π y al simplificar

$$\frac{330\pi}{\pi} = \mathbf{330°}$$

DEFINICIÓN DE REVOLUCIÓN:

En matemáticas, revolución se usa con el significado de "vuelta" o "giro". Una revolución corresponde a un giro de 360°.

Para hacer la conversión de ángulos a revoluciones se plantean las proporciones, haciendo uso de regla de tres simple directa.

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN No.3

A. Encontrar la medida en grados que corresponde a los siguientes ángulos dados en radianes, dibujar los ángulos y establecer en cuál cuadrante se encuentran:

1. 5π / 18
2. π / 9
3. $\frac{-2}{3}\pi$
4. $\frac{13}{10}\pi$
5. $\frac{-5}{9}\pi$

B. Encontrar la medida en radianes que corresponde a la medida del ángulo dado en grados, dibujar los ángulos y establecer en cuál cuadrante se encuentran:

1. 100°
2. 630°
3. 72°
4. – 450°
5. 54°

C. Si una revolución corresponde a un giro de 360°, efectuar las siguientes conversiones:

1) ¿Cuántas revoluciones son 240°?
2) ¿A cuántos grados equivale $\frac{1}{8}$ de revolución?
3) ¿Cuántas revoluciones hay en 90°?
4) ¿Cuántas revoluciones hay en 720°?
5) ¿Cuántos grados hay en $\frac{3}{4}$ de revolución?

D. Completar el siguiente cuadro

	1	2	3	4	5	6	7
Grados	720°				360°		225°
Radianes			$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$			
Revoluciones		$\frac{3}{2}$				$\frac{3}{4}$	

SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

Para operar en el **sistema sexagesimal** debemos tener en cuenta que cada **unidad se divide en 60 unidades** de orden inferior.

1 h $\longrightarrow$ 60 min $\longrightarrow$ 60 s

1° $\longrightarrow$ 60' $\longrightarrow$ 60''

Suma

Se disponen las horas debajo de las horas (o los grados debajo de los grados), los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos; y se suman.

Sumar: 24°58’37” + 18°32’48”:

Sumar: 59°45’13” +100°25’23”:

Sumar: 124°32’47” + 28°25’14”:

Sumar: 65°57’55” + 55°58’46”:

Sumar: 33°33’33” + 44°44’44”:

Sumar: 100°5’59” + 20°59’23”:

Sumar: 77°59’59” + 87°49’59”:

Sumar: 14°13’27” + 58°49’ + 25°30’54”:

Sumar: 19°48’54” + 0°39’55”+16°0’57”:

Resta

1°. Se disponen las horas debajo de las horas (o los grados debajo de los grados), los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos.

2º. Se restan los segundos. Si el minuendo es menor que el sustraendo, pasamos un minuto del minuendo a 60 segundos y se lo sumamos a los segundos del minuendo. A continuación, restamos los segundos.

EJEMPLOS:

Realiza las siguientes restas:

1. Restar 68°35’42” – 56°46’39”:

2. Restar: 105°50’36” – 77°48’20”:

3. Restar: 29°0’16” – 14°35’8”:

4. Restar: 137°52’36” – 88°59’44”:

5. Restar 66°33’8” – 55°55’55”:

6. Restar 71°10’28” – 41°58’59”:

7. Restar 100°33’13” – 98°53’35”:

8. Restar 25°40’31” – 16°41’32”:

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN No.4

A. Haciendo uso del concepto de conversión de suma y resta de ángulos, dar solución a los siguientes ejercicios:

1) 25° 30’ + 10° 30’
2) 90° – 50° 30’
3) 25° 30’ + 40° 30’
4) 57° 45’ – 47° 15’
5) 44° 53’ 37” + 32° 35’ 42”
6) 53’ 14” + 59° 35’ 22”
7) 23° 40’ 19” + 47° 25’ 32”
8) 56° 22’ 11” – 14° 34’ 33”
9) 44° 44’ 44” + 55° 55’ 55”
10) 107° 2’ 23” – 95° 36’ 59”

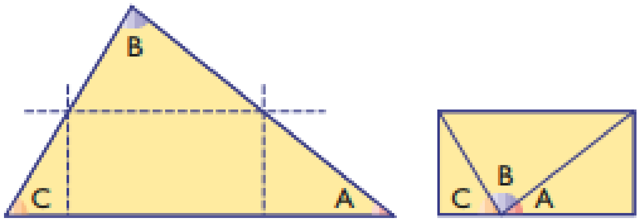
B. Un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 23° 44’ 53”. ¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos?

C. Un ángulo mide 43° 28’ 45”. Halla cuánto mide el complementario.

D. Un ángulo mide 83° 14’ 27”. Halla cuánto mide el suplementario.

E. Cada uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles mide 45° 55’ 17”. Halla cuánto mide el ángulo desigual.

F. En el siguiente triángulo, el ángulo A mide 37° 22’ 45” y el ángulo B mide 83° 53’ 48”. ¿Cuánto mide el ángulo C?

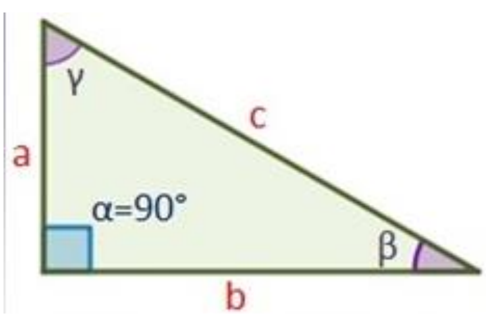


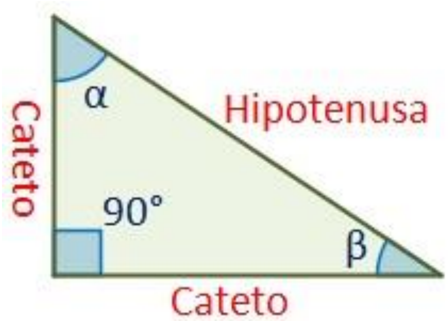
TRIÁNGULO RECTÁNGULO Y TEOREMA DE PITÁGORAS

TRIÁNGULO RECTÁNGULO: Un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto (es decir, mide 90°) en uno de sus ángulos agudos.

Los lados en un triángulo rectángulo tienen nombres, de esta forma llamamos hipotenusa al lado de mayor tamaño que además es el que siempre se encuentra en el lado opuesto al ángulo recto, los otros dos lados reciben la denominación de catetos.

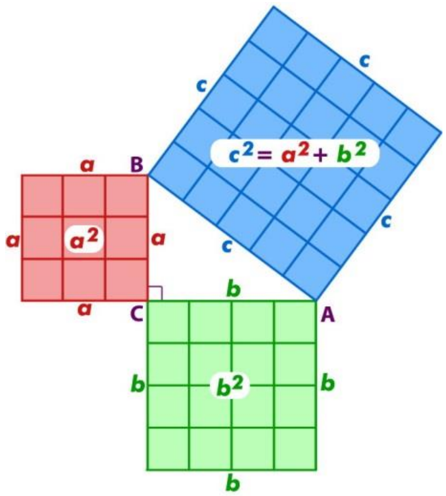
En todo **triángulo rectángulo** se cumple que: Tiene dos ángulos agudos. La hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos. La altura que parte del vértice del ángulo recto, coincide con un cateto, con tal de considerar al otro cateto como una base.





TEOREMA DE PITÁGORAS

Este teorema indica la relación existente entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo en donde si elevamos al cuadrado cada uno de los dos catetos y sumamos ambos, tendremos una medida igual al cuadrado de la hipotenusa.



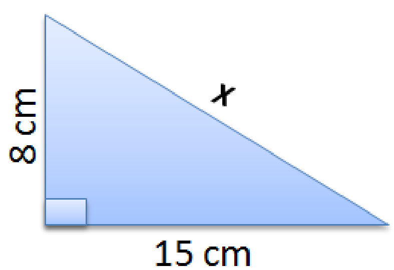
Es decir, si llamamos a la hipotenusa *h* y a cada uno de los catetos *a* y *b*, tendremos:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Para entender bien el Teorema de Pitágoras debemos de tener claros algunos conceptos. Por ejemplo, que sólo es aplicable a los triángulos rectángulos, es decir, a aquellos triángulos que tienen un ángulo recto. También hemos de saber cuáles son los nombres que reciben los lados de un triángulo rectángulo: los lados que conforman el ángulo recto se llaman catetos, mientras el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CON EL TEOREMA DE PITÁGORAS

1. En el siguiente triángulo calcular el valor de ***X***



Solución:

- ✓ Lo primero que se debe tener en cuenta es identificar qué lado se va a calcular, en este caso ***X*** corresponde a la hipotenusa.

- Para calcular la hipotenusa se suman los cuadrados de los catetos:

$X^2 = (8\ cm)^2 + (15\ cm)^2$

$X^2 = 64\ cm^2 + 225\ cm^2$

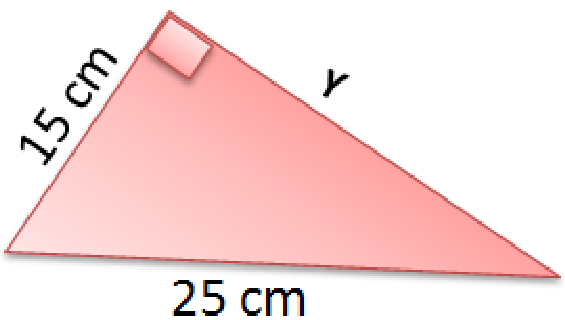
$X^2 = 289\ cm^2$

- Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos.

$X = \sqrt{289\ cm^2} = 17\ cm$

- Finalmente, el valor obtenido (17 cm) es el valor de la hipotenusa.

2. En el siguiente triángulo hallar el valor de ***Y***



<u>Solución:</u>

- Lo primero que se debe tener en cuenta es identificar qué lado se va a calcular, en este caso ***Y*** corresponde al valor de un cateto.

- Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:

$Y^2 = (25\ cm)^2 - (15\ cm)^2$

$Y^2 = 625\ cm^2 - 225\ cm^2$

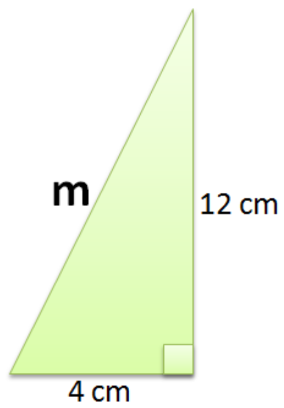
$Y^2 = 400\ cm^2$

- Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior.

$Y = \sqrt{400\ cm^2} = 20\ cm$

- Finalmente, el valor obtenido (20 cm) es el valor del cateto.

3. En el siguiente triángulo hallar el valor de ***M***



<u>Solución:</u>

- ✓ Lo primero que se debe tener en cuenta es identificar qué lado se va a calcular, en este caso ***M*** corresponde a la hipotenusa.

- ✓ Para calcular la hipotenusa se suman los cuadrados de los catetos:

$M^2 = (4\ cm)^2 + (12\ cm)^2$

$M^2 = 16\ cm^2 + 144\ cm^2$

$M^2 = 160\ cm^2$

- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos.

$M = \sqrt{160\ cm^2} =$

Como en este caso 160 no tiene raíz cuadrada exacta, procederemos entonces a descomponer este valor en sus factores primos para así obtener su valor sin decimales.

160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

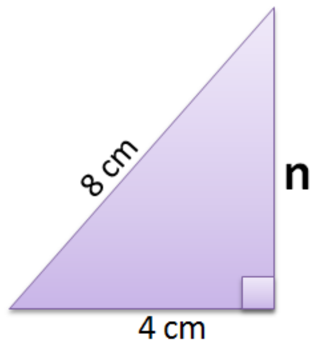
$\sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 5} \rightarrow$

Cómo es una raíz cuadrada, todos los valores que estén a la 2 salen de la raíz, los demás quedan entre la raíz.

$2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 5} \rightarrow 4\sqrt{10}$

- ✓ Finalmente, el valor obtenido ($4\sqrt{10}$) es el valor de la hipotenusa.

4. En el siguiente triángulo hallar el valor de ***N***



Solución:

- ✓ Lo primero que se debe tener en cuenta es identificar qué lado se va a calcular, en este caso ***N*** corresponde al valor de un cateto.

- ✓ Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:

$N^2 = (8\ cm)^2 - (4\ cm)^2$

$N^2 = 64\ cm^2 - 16\ cm^2$

$N^2 = 48\ cm^2$

- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior.

$N = \sqrt{48\ cm^2} =$

Como en este caso 48 no tiene raíz cuadrada exacta, procederemos entonces a descomponer este valor en sus factores primos para así obtener su valor sin decimales

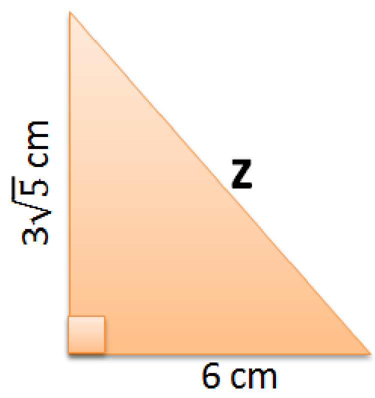
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$\sqrt{2^2 \, . \, 2^2 . 3} \rightarrow$ Cómo es una raíz cuadrada, todos los valores que estén a la 2 salen de la raíz, los demás quedan entre la raíz.

$2 . 2 . \sqrt{3} \rightarrow 4\sqrt{3}$

- ✓ Finalmente, el valor obtenido ($4\sqrt{3}$) es el valor del cateto.

5. En el siguiente triángulo hallar el valor de ***Z***



Solución:

- ✓ Lo primero que se debe tener en cuenta es identificar qué lado se va a calcular, en este caso Z corresponde a la hipotenusa.

- ✓ Para calcular la hipotenusa se suman los cuadrados de los catetos:

$Z^2 = (6\ cm)^2 + (3\sqrt{5}\ cm)^2$

En el caso del segundo paréntesis son dos términos que se están multiplicando, uno el 3 y otro $\sqrt{5}$, por lo tanto se eleva al cuadrado cada uno: $(3)^2$, da como resultado 9, y $(\sqrt{5}\ )^2$, da como resultado 5.

$Z^2 = 36\ cm^2 + (9.\ 5)\ cm^2$

$Z^2 = 36\ cm^2 + 45\ cm^2$

$Z^2 = 81\ cm^2$

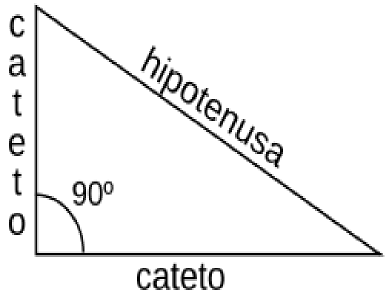
- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos.

$Z= \sqrt{81\ cm^2} = 9$ cm

- ✓ Finalmente, el valor obtenido (9 cm) es el valor de la hipotenusa.

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

Haciendo uso del teorema de Pitágoras completar la siguiente tabla, dejando consignado el procedimiento para cada triángulo.

	Cateto	Cateto	Hipotenusa
1		8	10
2	5	12	
3	1		$\sqrt{2}$
4		$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
5	$\sqrt{10}$		$\sqrt{15}$
6	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$	
7	10		26
8		24	$4\sqrt{61}$
9	27	36	
10		$5\sqrt{2}$	10
11	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	
12	24		48
13		8	17
14	9		15
15	2	2	

Tríos Pitagóricos

Si un trio de números naturales cumple con el teorema de Pitágoras, estos números son llamados tríos pitagóricos.

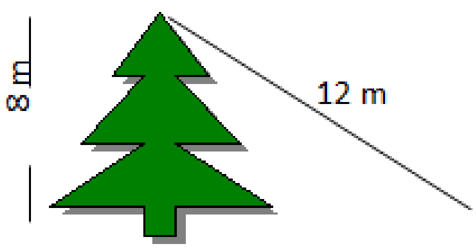
Ejercicio:

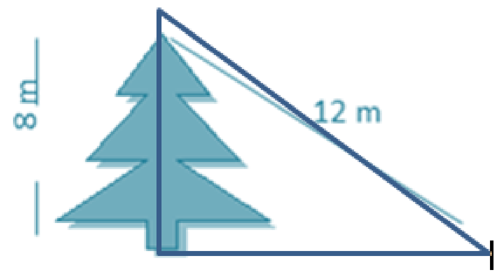
Determinar cuales de los siguientes tríos son pitagóricos:

Cateto 1	Cateto 2	Hipotenusa
3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25
20	21	29
12	35	37

Aplicación del teorema de Pitágoras en la solución de situaciones problema con triángulos rectángulos

1. Calcular la medida aproximada de la sombra del árbol.





Solución:

- ✓ En este caso podemos observar como este problema podemos formar un triángulo rectángulo en relación a la altura y la sombra del árbol, por lo tanto, la sombra corresponde al valor de un cateto.

- ✓ Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:

$C^2 = (12\ m)^2 - (8\ m)^2$

$C^2 = 144\ m^2 - 64\ m^2$

$C^2 = 80\ m^2$

- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior.

C= $\sqrt{80\ m^2}$ =

Como en este caso 80 no tiene raíz cuadrada exacta, procederemos entonces a descomponer este valor en sus factores primos para así obtener su valor sin decimales.

$$\begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

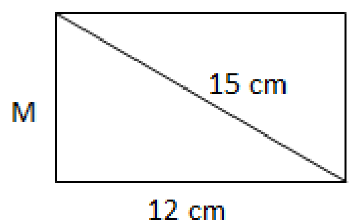
$$\sqrt{2^2 . 2^2 . 5} \rightarrow$$

Cómo es una raíz cuadrada, todos los valores que estén a la 2 salen de la raíz, los demás quedan entre la raíz.

$$2 . 2 . \sqrt{5} \rightarrow 4\sqrt{5}$$

- ✓ Finalmente, el valor obtenido ($4\sqrt{5}$ mm) es el valor de la sombra del árbol.

2. Calcular el valor de ***M*** en el siguiente rectángulo:



<u>**Solución:**</u>

- ✓ En este caso podemos observar como en el rectángulo al trazar la diagonal se forman dos triángulos rectángulos, siendo la diagonal (15 cm) el valor que corresponde a la hipotenusa, por lo tanto, ***M*** corresponde a un cateto.

- ✓ Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:

M^2 = $(15\ cm)^2$ - $(12\ cm)^2$

M^2 = 225 cm^2 - 144 cm^2

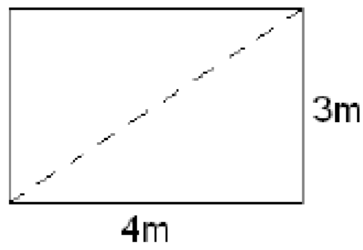
M^2 = 81 cm^2

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior

M= $\sqrt{81\ cm^2}$ = 9 cm

- ✓ Finalmente, el valor obtenido (9 cm) es el valor de M.

3. El dormitorio de Pablo es rectangular, y sus lados miden 3 y 4 metros. Ha decidido dividirlo en dos partes triangulares con una cortina que une dos vértices opuestos. ¿Cuántos metros deberá medir la cortina?



Solución:

- ✓ En este caso podemos observar como en el rectángulo al trazar la diagonal se forman dos triángulos rectángulos, siendo la diagonal el valor que corresponde a la hipotenusa, por lo tanto, denominaremos ***h*** el valor a encontrar.

- ✓ Para calcular la hipotenusa se suman los cuadrados de los catetos:

$H^2 = (4\ m)^2 + (3\ m)^2$

$H^2 = 16\ m^2 + 9\ m^2$

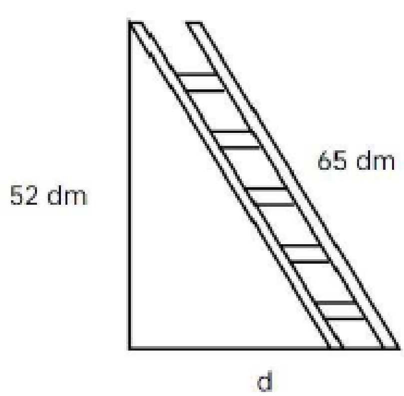
$H^2 = 25\ m^2$

- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos.

$H = \sqrt{25\ m^2} = 5\ m$

- ✓ Finalmente, el valor obtenido (5 m) es el valor de la cortina.

4. Una escalera de 65 dm está apoyada en una pared vertical a 52 decímetros del suelo. ¿A qué distancia se encuentra de la pared el pie de la escalera?



Solución:

- ✓ En este caso podemos observar cómo se forma un triángulo rectángulo entre la pared y el pie de la escalera, siendo la escalera el valor correspondiente a la hipotenusa ya que queda frente al ángulo recto, por lo tanto, el valor de ***d***, corresponde a un cateto.

- ✓ Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:

$D^2 = (65\ dm)^2 - (52\ dm)^2$

$D^2 = 4225\ dm^2 - 2704\ dm^2$

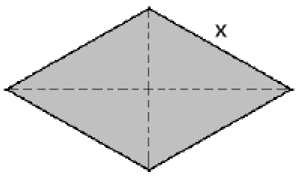
$D^2 = 1521\ dm^2$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior

$D= \sqrt{1521\ dm^2} = 39\ dm$

- ✓ Finalmente, el valor obtenido (39 dm) es el valor que corresponde a la distancia que hay entre la pared y el pie de la escalera.

5. Calcula la medida de cada lado de un rombo, sabiendo que sus diagonales miden 12 y 16 centímetros.



Solución:

- ✓ En este caso podemos observar como las diagonales dividen al rombo en 4 triángulos rectángulos, formándose en el centro los ángulos rectos, por lo tanto, ***X*** corresponde al valor de la hipotenusa y los lados serán iguales a la mitad de las diagonales.

- ✓ Para calcular la hipotenusa se suman los cuadrados de los catetos:

$X^2 = (6\ cm)^2 + (8\ cm)^2$

$X^2 = 36\ cm^2 + 64\ cm^2$

$X^2 = 100\ cm^2$

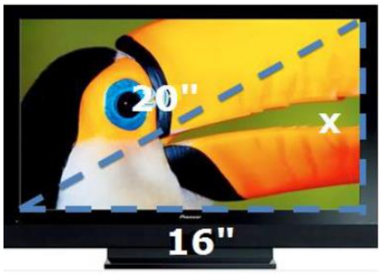
- ✓ Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos.

$X= \sqrt{100\ cm^2} = 10\ cm$, que es el valor de ***X***

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

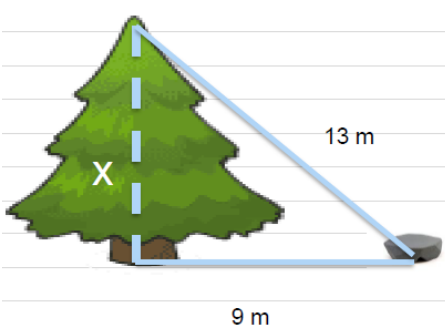
Haciendo uso del teorema de Pitágoras solucionar los siguientes ejercicios, dejando consignado el procedimiento.

1. Se sabe que un televisor es de 20" y el largo mide16", ¿cuál es la medida de su ancho?

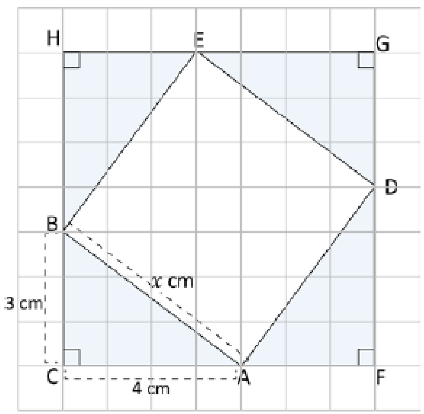


2. ¿Cuál es la distancia máxima que una persona puede nadar en una piscina de forma rectangular que mide 24 m de largo y 10 m de ancho si solo puede hacerlo en línea recta?

3. La distancia de la punta de un árbol a una piedra es de 13 metros. La distancia de la piedra a la base del árbol es de 9 metros. Calcular la altura del árbol.

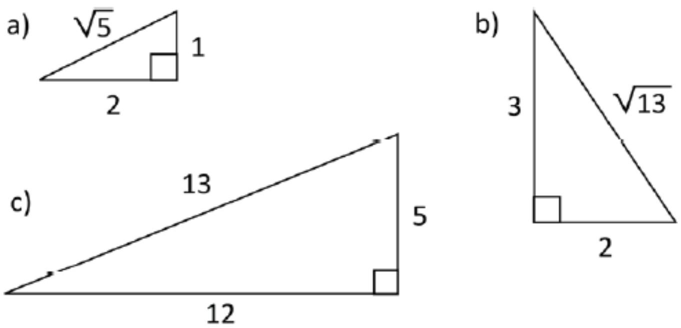


4. Encontrar el área de los cuadrados ADEB y el área de la parte sombreada.

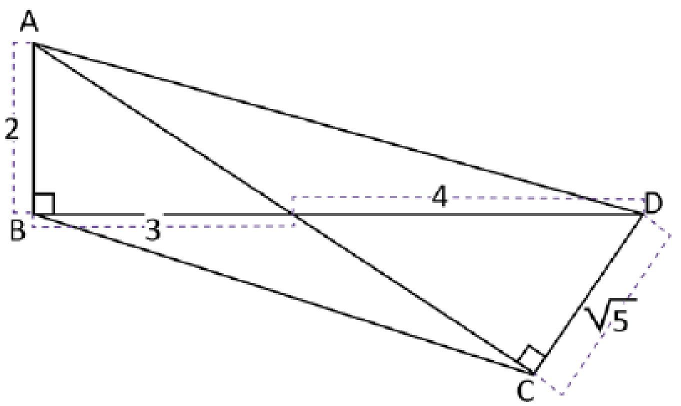


5. Encontrar la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos vértices están representados por los puntos A (1,0), B (0,1) y C (0,0).

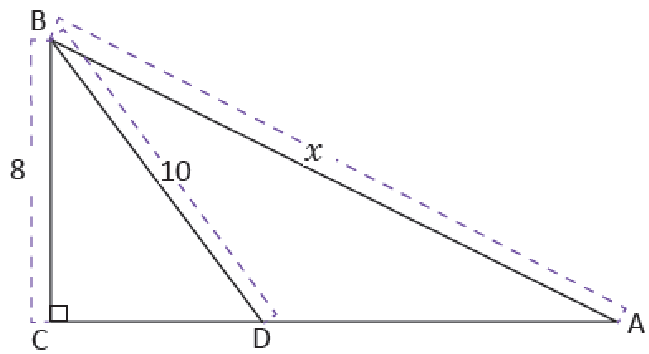
6. Verificar que el teorema de Pitágoras se cumple en los siguientes triángulos:



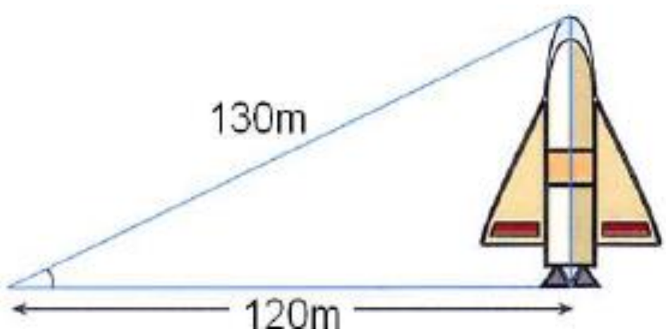
7. Determinar la medida de la diagonal AC, en el cuadrilátero ABCD.



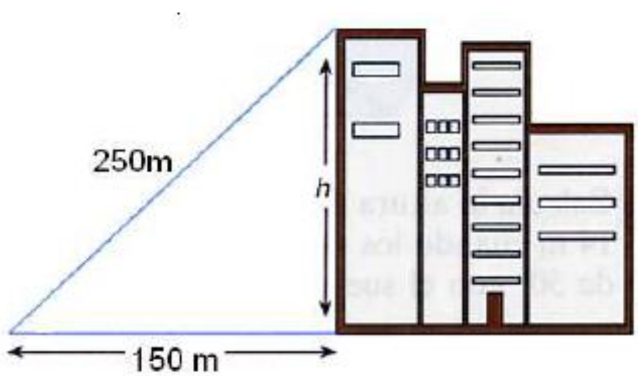
8. Encuentra “X”, sabiendo que ABD es isósceles:



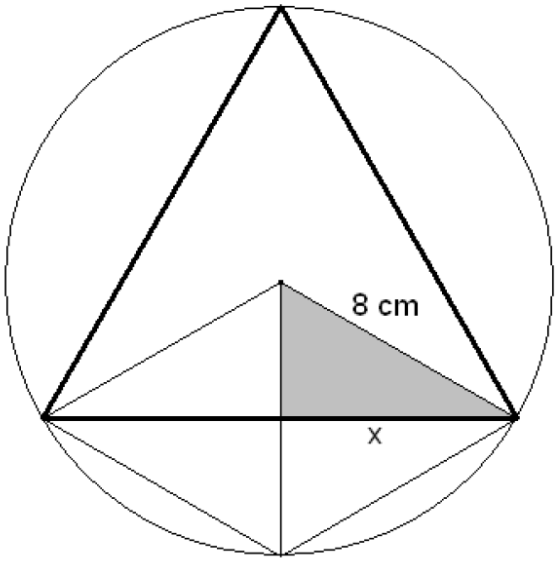
9. Calcular la medida del cohete.



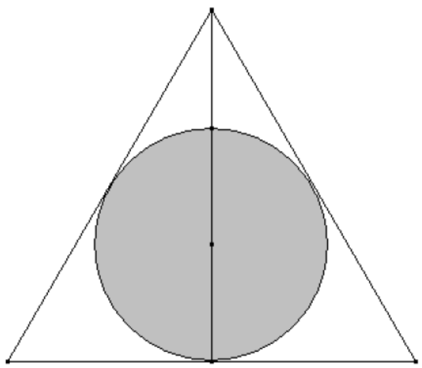
10. Si nos situamos a 150 metros de distancia de un rascacielos, la visual al extremo superior del mismo recorre un total de 250 metros. ¿Cuál es la altura total del rascacielos?



11. Calcular el perímetro del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 8 cm de radio, como la de la figura:



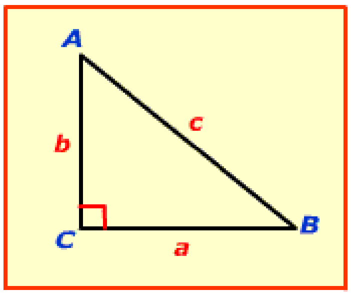
12. En un triángulo equilátero de 10 cm de lado se inscribe una circunferencia. Calcular el radio de la circunferencia, sabiendo que es la tercera parte de la altura del triángulo.



TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS ESPECIALES

Se consideran triángulos especiales en el estudio de la trigonometría, aquellos que tienen como ángulos 45°- 45° - 90° y 30° - 60° - 90°.

Teorema del triángulo rectángulo Isósceles (45° - 45° - 90°)



En un triángulo recto isósceles, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ más larga que la longitud de cada cateto, o sea, es el resultado de la multiplicación de la medida de uno de los catetos por $\sqrt{2}$.

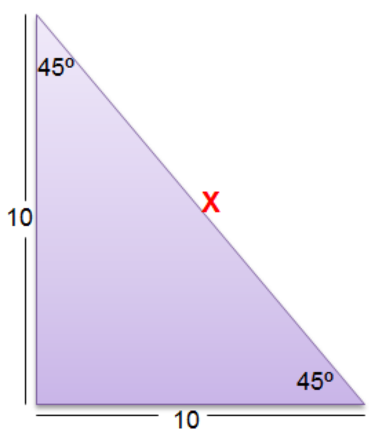
a = b

c = a$\sqrt{2}$ y c= b$\sqrt{2}$, ya que a = b

Por lo tanto, a$\sqrt{2}$ = b$\sqrt{2}$ por ser un triángulo isósceles

Ejemplos:

1. En el siguiente triángulo rectángulo hallar el valor de la hipotenusa.

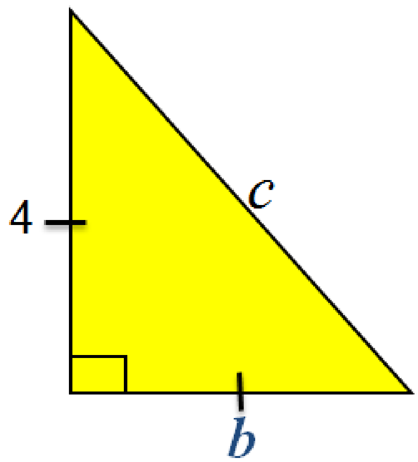


Solución:

✓ *Como se trata de un triángulo rectángulo isósceles, para calcular la hipotenusa (X) sólo es necesario multiplicar el valor de uno de sus lados por* $\sqrt{2}$

X *=* $10\sqrt{2}$

2. Encontrar la medida de las variables en el siguiente triángulo rectángulo isósceles:

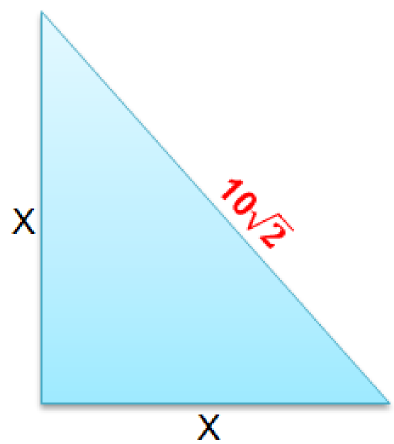


Solución:

- ✓ *Como se trata de un triángulo rectángulo isósceles, para calcular las variables sólo es necesario:*
- ✓ *b=4, porque ambos catetos tienen la misma medida.*
- ✓ *Para calcular la hipotenusa (C) sólo es necesario multiplicar el valor de uno de sus lados por $\sqrt{2}$*

$C = 4\sqrt{2}$

3. Hallar la medida de los catetos en el siguiente triángulo rectángulo isósceles.



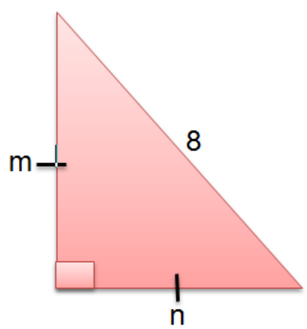
Solución:

- ✓ *Como se trata de un triángulo rectángulo isósceles, el valor de la hipotenusa sería:*
  $h = x.\sqrt{2},$
- ✓ *En este ejercicio* $h = 10\sqrt{2}$
- ✓ *por lo tanto, para calcular el valor del cateto se despeja el valor de la incógnita en la ecuación:*

$$h = x.\sqrt{2} \longrightarrow X = \frac{h}{\sqrt{2}} \longrightarrow X = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

- ✓ *por lo tanto, simplificando en la fracción $\sqrt{2}$, el valor de la* **X=** *10*

4. Hallar la medida de las variables m y n en el siguiente triángulo rectángulo isósceles:



Solución:

- ✓ *Como se trata de un triángulo isósceles, las variables m y n tienen el mismo valor y corresponden a un cateto.*
- ✓ *para calcular el valor del cateto se despeja el valor de la incógnita en la ecuación:*

$h = m.\sqrt{2}$ $\rightarrow$ $m = \frac{h}{\sqrt{2}}$ $\rightarrow$ $m = \frac{8}{\sqrt{2}}$

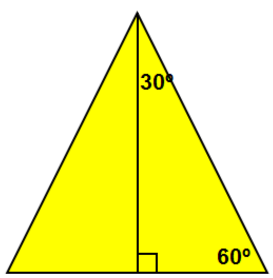
En este caso como el valor de m tiene en el denominador una raíz se recomienda que se racionalice el denominador.

$$\frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

✓ *por lo tanto, el valor de la **m=*** $4\sqrt{2}$

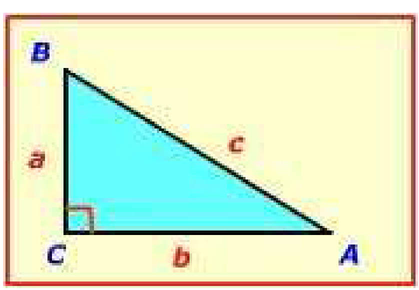
Teorema relacionado con los triángulos (30° - 60° - 90°)

Un triángulo de 30° - 60° - 90° resulta después de cortar a la mitad un triángulo equilátero:



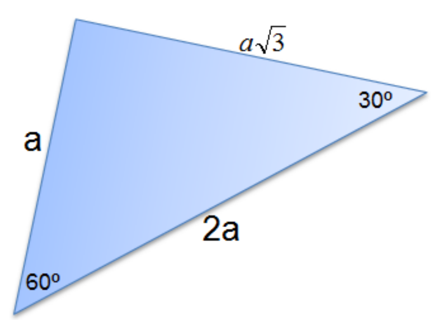
En un triángulo de 30º - 60º - 90º la medida de la hipotenusa es dos veces mayor que la medida del cateto de menor longitud, y la longitud del cateto mayor es $\sqrt{3}$ más grande que la longitud del cateto menor.

Suponga que a < b, entonces;



$c = 2a$

$b = a\sqrt{3}$



Cateto Largo= $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \boldsymbol{hipotenusa}$

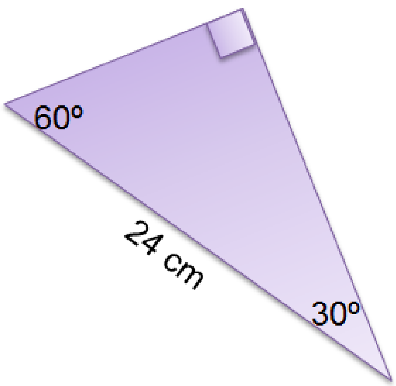
Cateto Largo= $\sqrt{3} \times \boldsymbol{Cateto\ Corto}$

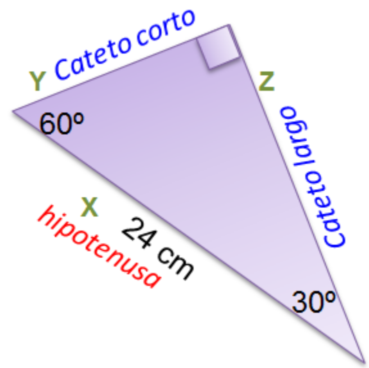
Cateto Corto= $\dfrac{\boldsymbol{hipotenusa}}{\boldsymbol{2}}$

Cateto Corto= $\dfrac{\boldsymbol{Cateto\ Largo}}{\sqrt{\boldsymbol{3}}}$

Ejemplos:

1. En el siguiente triángulo hallar la medida del cateto y la hipotenusa:





Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la medida de los catetos es proporcional al valor de su ángulo, por lo tanto el cateto más largo queda frente al ángulo mayor y el cateto más corto queda frente al ángulo menor.*

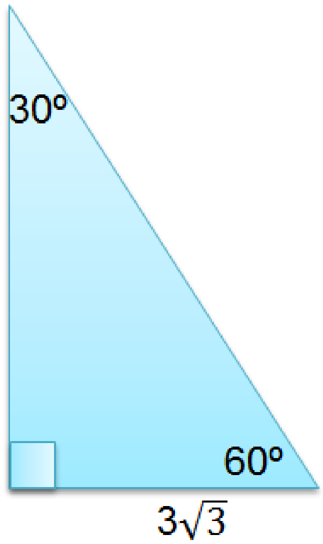
- ✓ *Como se conoce el valor de la hipotenusa (24 cm), el valor del cateto corto (Y) es igual a la mitad, es decir 12 cm*

  Y= $\dfrac{24\ cm}{\boldsymbol{2}}$ **= 12 cm**

- ✓ *Para calcular el cateto más largo (Z) se puede realizar con el valor de la hipotenusa o con el valor del cateto más corto, en este caso es un poco más sencillo hacerlo con el valor del cateto corto:*

  Z = 12 cm x $\sqrt{3}$ = **12$\sqrt{3}$ cm**

2. En el siguiente triángulo hallar la medida del cateto y la hipotenusa



Solución:

- *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la medida de los catetos es proporcional al valor de su ángulo, por lo tanto, el cateto más largo queda frente al ángulo mayor y el cateto más corto queda frente al ángulo menor.*

- *Como se conoce el valor del cateto más corto ($3\sqrt{3}$), el valor de la hipotenusa es igual al doble del cateto corto*

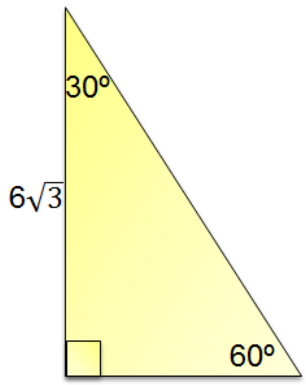
  Hipotenusa= *2. ($3\sqrt{3}$),* **= $6\sqrt{3}$**

- *Para calcular el cateto más largo se puede realizar con el valor de la hipotenusa o con el valor del cateto más corto, en este caso es un poco más sencillo hacerlo con el valor del cateto corto:*

  Cateto largo = $\sqrt{3} \times Cateto\ Corto$

  $= \sqrt{3} \times (3\sqrt{3}) = 3\sqrt{9} = 3 \times 3 = 9$

3. En el siguiente triángulo hallar la medida del cateto y la hipotenusa



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la medida de los catetos es proporcional al valor de su ángulo, por lo tanto, el cateto más largo queda frente al ángulo mayor y el cateto más corto queda frente al ángulo menor.*

- ✓ *Como se conoce el valor del cateto más largo ($6\sqrt{3}$), se puede calcular el valor del otro cateto (cateto corto).*

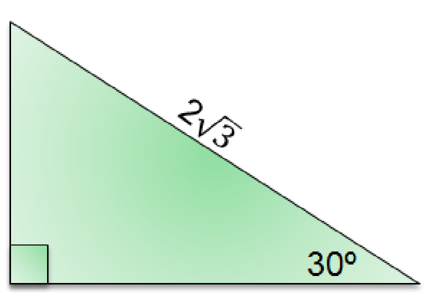
Cateto Corto= $\dfrac{\boldsymbol{Cateto\ Largo}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$ Cateto Corto= $\dfrac{6\sqrt{3}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$

- ✓ *Simplificando $\sqrt{3}$, el valor del cateto será igual a* ***6***

- ✓ *Para calcular la hipotenusa se multiplica el cateto corto por 2, teniendo en cuenta que la hipotenusa es el doble de este valor.*

  Hipotenusa= *2. (6),* **= 12**

4. En el siguiente triángulo hallar la medida de los catetos:



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la medida de los catetos es proporcional al valor de su ángulo, por lo tanto, el cateto más largo queda frente al ángulo mayor y el cateto más corto queda frente al ángulo menor.*

- ✓ *Como se conoce el valor de la hipotenusa, se puede empezar calculando el valor del cateto más corto:*

Cateto Corto= $\dfrac{\boldsymbol{hipotenusa}}{\mathbf{2}}$ **=** Cateto Corto= $\dfrac{2\sqrt{3}}{\mathbf{2}}$

- ✓ *Simplificando* 2*, el valor del cateto será igual a* $\boldsymbol{\sqrt{3}}$

- ✓ *Para calcular el cateto más largo se puede realizar con el valor de la hipotenusa o con el valor del cateto más corto, en este caso es un poco más sencillo hacerlo con el valor del cateto corto:*

Cateto largo = $\sqrt{\mathbf{3}} \times \boldsymbol{Cateto\ Corto}$

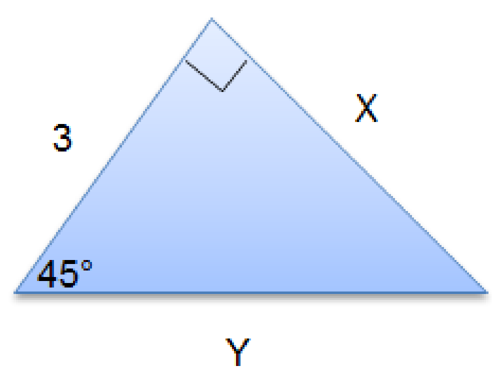
= $\sqrt{\mathbf{3}} \times (\sqrt{\mathbf{3}}) = \sqrt{\mathbf{9}} = \mathbf{3}$

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

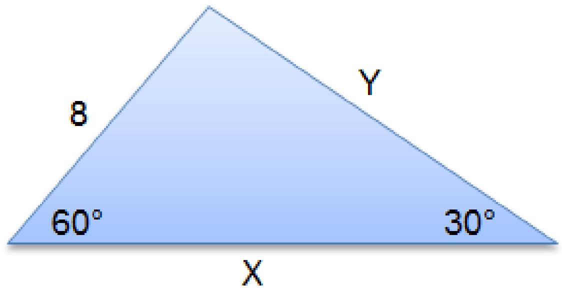
Haciendo uso de los teoremas para triángulos rectángulos de 45° - 45° - 90° y 30° - 60° - 90°, solucionar los siguientes ejercicios, dejando consignado el procedimiento.

1. Hallar la longitud de los valores x, y

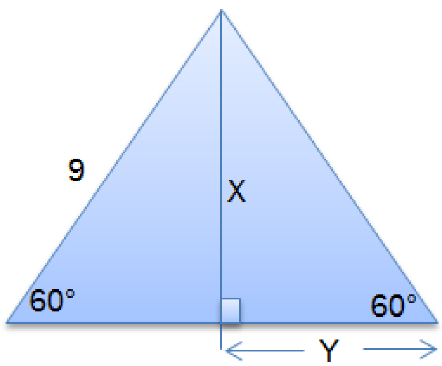
A)



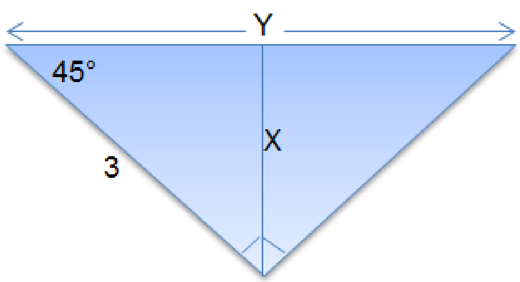
B)



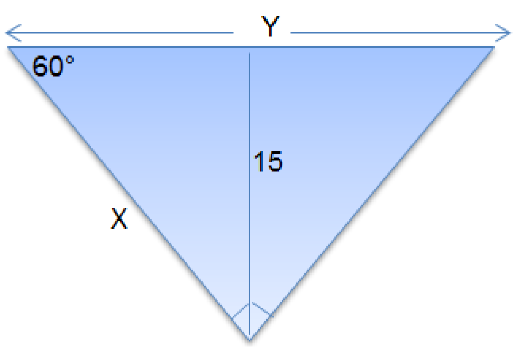
C)



D)



E)



2. La longitud de una diagonal de un cuadrado mide $10\sqrt{2}$ cm. Hallar la medida de la longitud de un lado del cuadrado.

3. La longitud de una altura de un triángulo equilátero es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Encontrar la longitud de un lado del triángulo.

4. El perímetro de un cuadrado es 44 metros. Hallar la longitud de la diagonal del cuadrado.

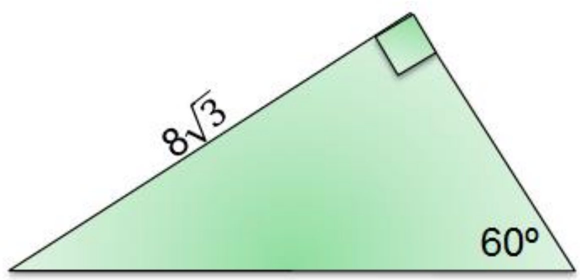
5. La longitud de un lado de un cuadrado es 13 cm. Hallar la longitud de la diagonal.

6. La longitud de un lado de un triángulo equilátero es $6\sqrt{3}$ metros. Hallar la longitud de una altura del triángulo.

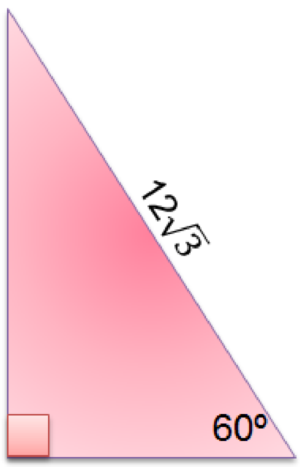
7. La longitud de una altura de un triángulo equilátero es 12 cm. Hallar la longitud de un lado del triángulo.

8. El perímetro de un triángulo equilátero es 39 cm. Hallar la longitud de una altura del triángulo.

9. En el siguiente triángulo hallar el valor de los lados desconocidos:



10. En el siguiente triángulo hallar el valor de los lados desconocidos:

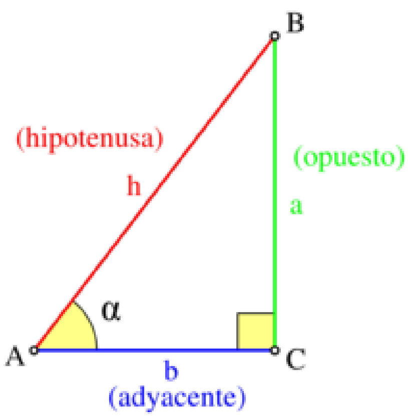


Razones trigonométricas

Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo

Las Razones trigonométricas se definen comúnmente como el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo asociado a sus ángulos. Las funciones trigonométricas son funciones cuyos valores son extensiones del concepto de razón trigonométrica en un triángulo rectángulo trazado en una circunferencia unitaria (de radio unidad). Existen seis funciones trigonométricas básicas.

Para definir las razones trigonométricas del ángulo: **α**, del vértice *A*, se parte de un triángulo rectángulo arbitrario que contiene a este ángulo. El nombre de los lados de este triángulo rectángulo que se usará en lo sucesivo será:



- La hipotenusa (*h*) es el lado opuesto al ángulo recto, o lado de mayor longitud del triángulo rectángulo.
- El cateto opuesto (*a*) es el lado opuesto al ángulo que queremos determinar.
- El cateto adyacente(*b*) es el lado adyacente al ángulo del que queremos determinar.

Todos los triángulos considerados se encuentran en el Plano Euclidiano, por lo que la suma de sus ángulos internos es igual a π radianes (o 180°). En consecuencia, en cualquier triángulo rectángulo los ángulos no rectos se encuentran entre 0 y π/2 radianes. Las definiciones que se dan a continuación definen estrictamente las funciones trigonométricas para ángulos de este rango:

- El **seno** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la longitud de la hipotenusa:

$$\sin\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}.$$

El valor de esta relación no depende del tamaño del triángulo rectángulo que elijamos, siempre que tenga el mismo ángulo α, en cuyo caso se trata de triángulos semejantes.

- El **coseno** de un ángulo la relación entre la longitud del cateto adyacente y la longitud de la hipotenusa:

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}.$$

- La **tangente** de un es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la del adyacente:

$$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}.$$

- La **cotangente** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto adyacente y la del opuesto:

$$\cot\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{b}{a}.$$

- La **secante** de un ángulo es la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto adyacente:

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{h}{b}.$$

- La **cosecante** de un ángulo es la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto:

$$\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{h}{a}.$$

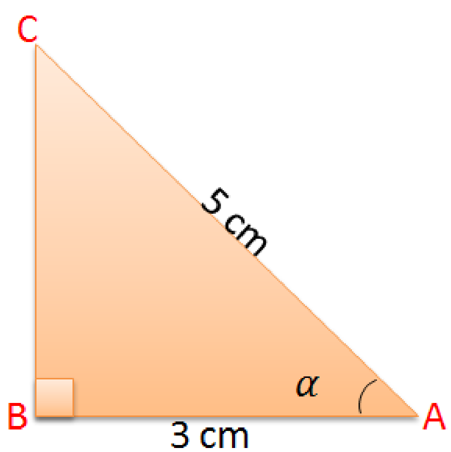
Tabla de funciones trigonométricas

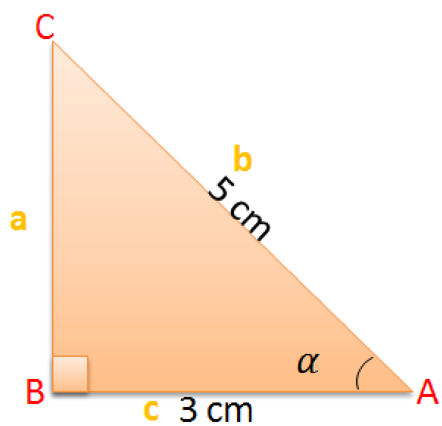
FUNCIÓN	ABREVIATURA	FÓRMULAS	
SENO	Sen	$\frac{Cat.Opuesto}{Hipotenusa}$	$\frac{1}{Csc}$
COSENO	Cos	$\frac{Cat.Adyacente}{Hipotenusa}$	$\frac{1}{Sec}$
TANGENTE	Tan	$\frac{Cat.Opuesto}{Cat.Adyacente}$	$\frac{1}{Cot}$
COTANGENTE	Cot	$\frac{Cat.Adyacente}{Cat.Opuesto}$	$\frac{1}{Tan}$
SECANTE	Sec	$\frac{Hipotenusa}{Cat.Adyacente}$	$\frac{1}{Cos}$
COSECANTE	Csc	$\frac{Hipotenusa}{Cat.Opuesto}$	$\frac{1}{Sen}$

EJEMPLOS:

- Calcular las razones trigonométricas de los siguientes triángulos rectángulos:

1.





Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b).*
- ✓ *Como se desconoce el valor del cateto opuesto (que es el que está frente al ángulo de referencia α), se puede utilizar el teorema de Pitágoras para conocer su valor; en este caso ese valor corresponde a un cateto.*

- *Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:*

$a^2 = (5\ cm)^2 - (3\ cm)^2$

$a^2 = 25\ cm^2 - 9\ cm^2$

$a^2 = 16\ cm^2$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior

$a = \sqrt{16\ cm^2} = 4\ cm$

- *Finalmente, el valor obtenido (4 cm) es el valor que corresponde al cateto opuesto.*

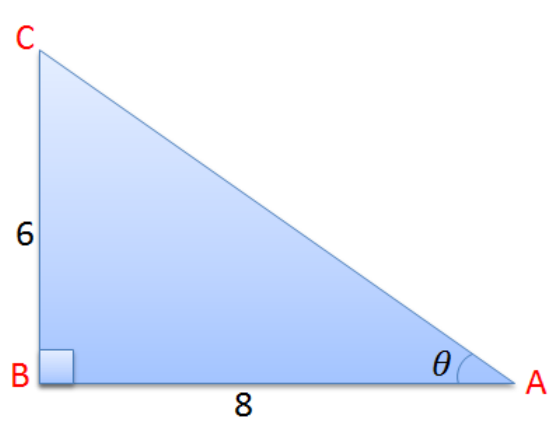
- *Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo α:*

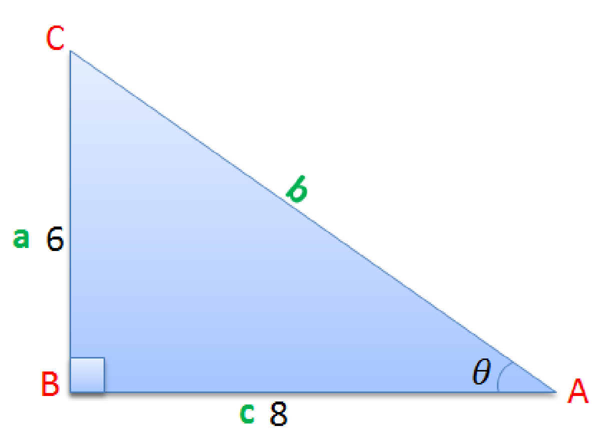
$$Sen\alpha = \frac{Cat.Op.}{Hip} = \frac{a}{b} = \frac{4\ cm}{5\ cm} = 0{,}8 \qquad cos\alpha = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{c}{b} = \frac{3\ cm}{5\ cm} = 0{,}6$$

$$Tan\alpha = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{a}{c} = \frac{4\ cm}{3\ cm} = 1{,}33 \qquad Cot\alpha = \frac{Cat.Ady.}{Cat.Op.} = \frac{c}{a} = \frac{3\ cm}{4\ cm} = 0{,}75$$

$$Sec\alpha = \frac{Hip.}{Cat.Ady} = \frac{b}{c} = \frac{5\ cm}{3\ cm} = 1{,}67 \qquad Csc\alpha = \frac{Hip.}{Cat.op} = \frac{b}{a} = \frac{5\ cm}{4\ cm} = 1{,}25$$

2.





Solución:

- Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)
- Como se desconoce el valor de la hipotenusa, se puede utilizar el teorema de Pitágoras para conocer su valor.
- Para calcular la hipotenusa se suma el cuadrado de sus catetos

$b^2 = (6)^2 + (8)^2$

$b^2 = 36 + 64$

$b^2 = 100$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la suma anterior

$b = \sqrt{100} = 10$

- Finalmente, el valor obtenido (10) es el valor que corresponde a la hipotenusa.

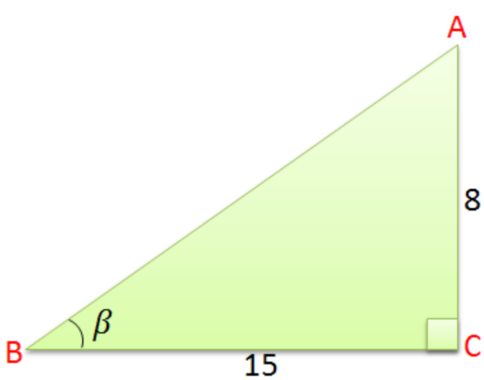
- Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo θ:

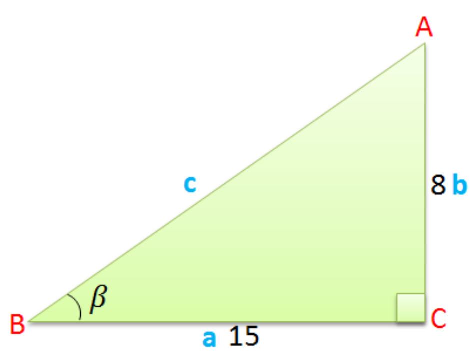
$Sen\theta = \frac{Cat.Op.}{Hip} = \frac{a}{b} = \frac{6}{10} = 0{,}6$ $\qquad cos\theta = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{c}{b} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

$Tan\theta = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{a}{c} = \frac{6}{8} = 0{,}75$ $\qquad Cot\theta = \frac{Cat.Ady.}{Cat.Op.} = \frac{c}{a} = \frac{8}{6} = 1{,}33$

$Sec\theta = \frac{Hip.}{Cat.Ady} = \frac{b}{c} = \frac{10}{8} = 1{,}25$ $\qquad Csc\theta = \frac{Hip.}{Cat.op} = \frac{b}{a} = \frac{10}{6} = 1{,}67$

3.





Solución:

- Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (c)
- Como se desconoce el valor de la hipotenusa, se puede utilizar el teorema de Pitágoras para conocer su valor.
- Para calcular la hipotenusa se suma el cuadrado de sus catetos

$c^2 = (15)^2 + (8)^2$

$c^2 = 225 + 64$

$c^2 = 289$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la suma anterior

$c = \sqrt{289} = 17$

- Finalmente, el valor obtenido (17) es el valor que corresponde a la hipotenusa.

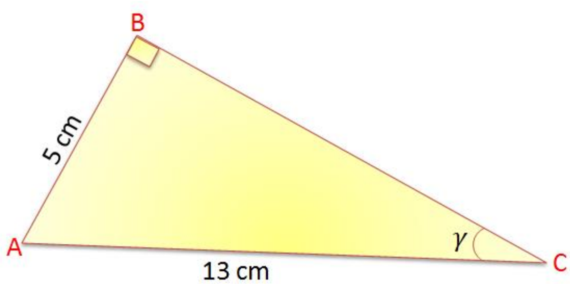
- Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo β:

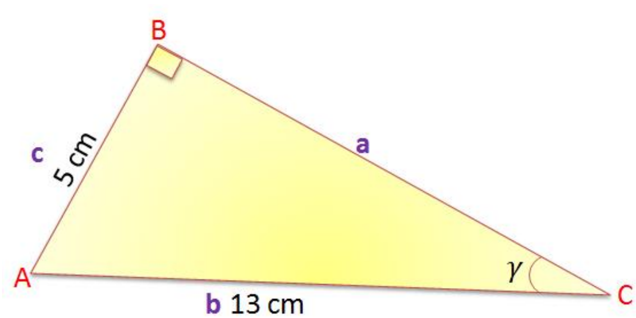
$$Sen\beta = \frac{Cat.Op.}{Hip} = \frac{b}{c} = \frac{8}{17} = 0{,}47 \qquad cos\beta = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{a}{c} = \frac{15}{17} = 0{,}88$$

$$Tan\beta = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{b}{a} = \frac{8}{15} = 0{,}53 \qquad Cot\beta = \frac{Cat.Ady.}{Cat.Op.} = \frac{a}{b} = \frac{15}{8} = 1{,}875$$

$$Sec\beta = \frac{Hip.}{Cat.Ady} = \frac{c}{a} = \frac{17}{15} = 1{,}13 \qquad Csc\beta = \frac{Hip.}{Cat.op} = \frac{c}{b} = \frac{17}{8} = 2{,}125$$

4.





Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- ✓ *En este caso se desconoce el valor del cateto adyacente(a), para calcularlo se puede utilizar el teorema de Pitágoras.*
- ✓ *Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:*

$a^2 = (13\ cm)^2 - (5\ cm)^2$

$a^2 = 169\ cm^2 - 25\ cm^2$

$a^2 = 144\ cm^2$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior

$a = \sqrt{144\ cm^2} = 12$ cm

- ✓ *Finalmente, el valor obtenido (12 cm) es el valor que corresponde al cateto adyacente.*

- ✓ *Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo γ:*

$Sen\gamma = \frac{Cat.Op.}{Hip} = \frac{c}{b} = \frac{5\ cm}{13\ cm} = 0{,}38$ $cos\gamma = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{a}{b} = \frac{12\ cm}{13\ cm} = 0{,}92$

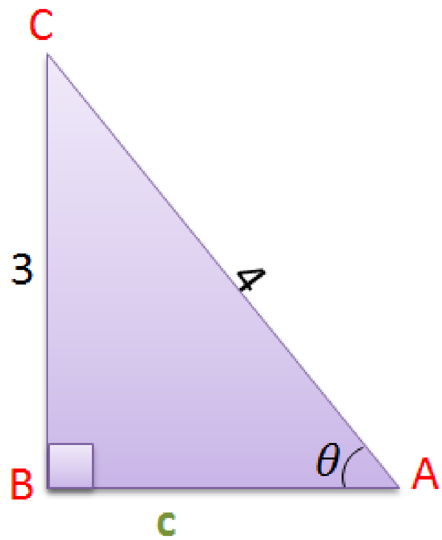
$Tan\gamma = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{c}{a} = \frac{5\ cm}{12\ cm} = 0{,}42$ $Cot\gamma = \frac{Cat.Ady.}{Cat.Op.} = \frac{a}{c} = \frac{12\ cm}{5\ cm} = 2{,}4$

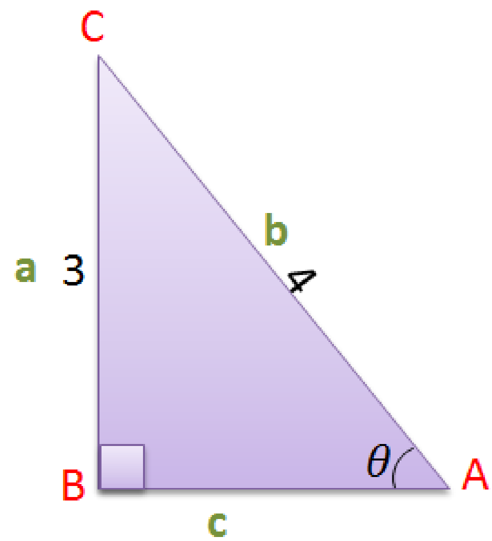
$Sec\gamma = \frac{Hip.}{Cat.Ady} = \frac{b}{a} = \frac{13\ cm}{12\ cm} = 1{,}08$ $Csc\gamma = \frac{Hip.}{Cat.op} = \frac{b}{c} = \frac{13\ cm}{5\ cm} = 2{,}6$

- Hallar el valor de Cosθ y Tanθ, si sen$\theta = \frac{3}{4}$

Solución:

- ✓ *Como sen$\theta = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{3}{4}$, entonces 3 es el valor del cateto opuesto del ángulo θ y 4 es la hipotenusa del triángulo rectángulo. Gráficamente quedaría así:*





- *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- *En este caso se desconoce el valor del cateto adyacente(c), para calcularlo se puede utilizar el teorema de Pitágoras.*
- *Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:*

$c^2 = (4)^2 - (3)^2$

$c^2 = 16 - 9$

$c^2 = 7$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior

$c = \sqrt{7} =$

- *En este caso* $\sqrt{7}$ *no tiene raíz cuadrada exacta, por lo tanto podemos dejarla indicada*

- *Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor coseno y la tangente para el ángulo* θ*:*

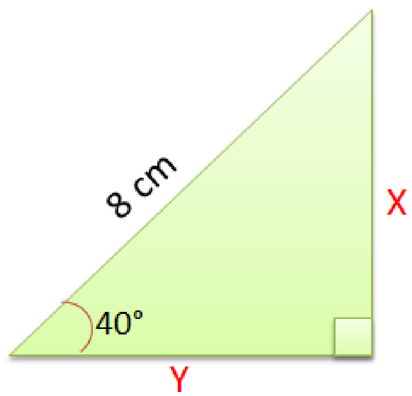
$$\cos\theta = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0{,}66$$

$$Tan\theta = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{a}{c} = \frac{3\ cm}{\sqrt{7}\ cm} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

En el caso de la tangente, como $\sqrt{7}$ queda en el denominador, debemos racionalizarla:

$$\frac{3\ cm}{\sqrt{7}\ cm} = \frac{3.\sqrt{7}}{\sqrt{7}\ .\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{49}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

- En el siguiente triángulo hallar el valor de "X" y "Y"



Solución:

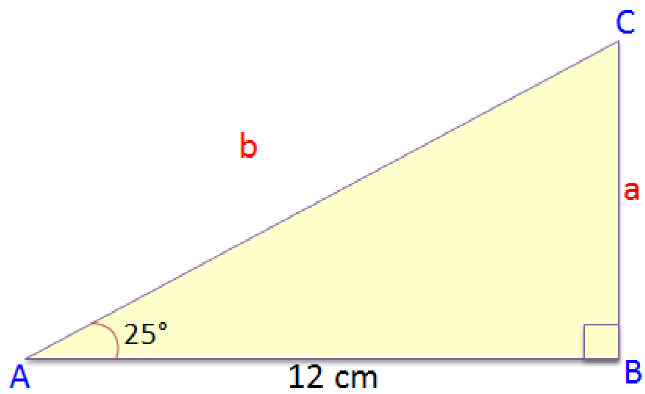
- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (8 cm)*
- ✓ *En este caso se desconoce el valor de los catetos opuesto (X) y adyacente (Y).*
- ✓ *Como se conoce el valor de la hipotenusa y el valor del ángulo, se puede emplear la función seno o coseno, que son las que contienen la hipotenusa.*
- ✓ *En el caso del cateto **X**, se utilizará la función seno:*

$$sen40° = \frac{Cat.op}{hipot} \rightarrow sen40° = \frac{\boldsymbol{X}}{8\ cm} \rightarrow \boldsymbol{X} = sen40°\ x\ 8\ cm \rightarrow \boldsymbol{X} = 0{,}64\ x\ 8\ cm \rightarrow \boldsymbol{X} \approx \mathbf{5\ cm}$$

- ✓ *Para calcular **Y** se puede utilizar teorema de Pitágoras o la función coseno (que contienen el valor de la hipotenusa) o la función tangente (que contiene el valor del cateto opuesto, el cual fue hallado previamente). En este caso se utilizará la función coseno:*

$$cos40° = \frac{Cat.ady}{Hipot} \rightarrow cos40° = \frac{\boldsymbol{Y}}{8\ cm} \rightarrow \boldsymbol{Y} = cos40°\ x\ 8\ cm \rightarrow \boldsymbol{Y} = 0{,}77\ x\ 8\ cm \rightarrow \boldsymbol{Y} \approx \boldsymbol{6\ cm}$$

- En el siguiente triángulo hallar el valor de “a” y “b”



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- ✓ *En este caso se desconoce el valor de la hipotenusa(b) y el cateto opuesto (a)*
- ✓ *Como se conoce el cateto adyacente (12 cm), se puede emplear la función coseno o tangente, que son las que contienen este valor.*
- ✓ *En el caso del cateto b, se utilizará la función coseno:*

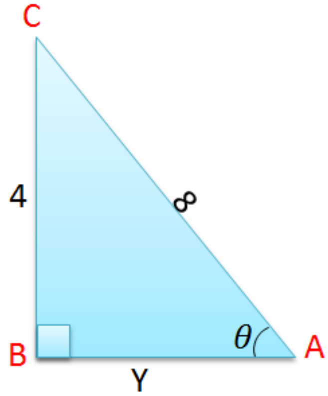
$$Cos25° = \frac{Cat.ady}{hipot} \rightarrow cos25° = \frac{12\ cm}{\boldsymbol{b}} \rightarrow \boldsymbol{b} = \frac{12\ cm}{cos25°} \rightarrow \boldsymbol{b} = \frac{12\ cm}{0{,}9} \rightarrow \boldsymbol{b} \approx \boldsymbol{13\ cm}$$

- ✓ *Para calcular **a** se puede utilizar teorema de Pitágoras o la función seno (que contienen el valor de la hipotenusa, la cual fue hallada previamente) o la función tangente (que contiene el valor del cateto adyacente). En este caso se utilizará la función tangente:*

$$Tan25° = \frac{Cat.op.}{Cat.ady} \rightarrow tan25° = \frac{\boldsymbol{a}}{12\ cm} \rightarrow \boldsymbol{a} = tan25°\ x\ 12\ cm \rightarrow \boldsymbol{a} = 0{,}47\ x\ 12\ cm$$

$$\boldsymbol{a} \approx \boldsymbol{5,6\ cm}$$

- En el siguiente triángulo hallar el valor de “**Y**” y el ángulo θ:



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- ✓ *En este caso se desconoce el valor del cateto adyacente (Y), para calcularlo se puede utilizar el teorema de Pitágoras.*
- ✓ *Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:*

$Y^2 = (8)^2 - (4)^2$

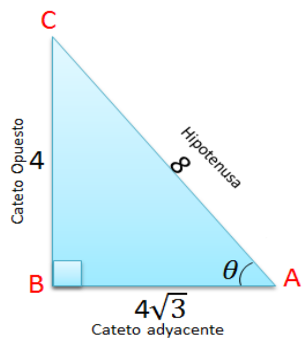
$Y^2 = 64 - 16$

$Y^2 = 48$

$Y = \sqrt{48}$

$Y = 4\sqrt{3} \approx 6{,}9$

Para calcular el ángulo θ, podemos utilizar las funciones seno, coseno o tangente.



En este caso utilizaremos la función seno= $\frac{Cat.opuesto}{Hipotenusa} = \frac{4}{8} = 0{,}5$

- ✓ *Para obtener el ángulo debemos hacer uso de la calculadora científica, teniendo en cuenta los siguientes criterios:*
- *Identificar la parte del teclado de la calculadora que vas a tener que utilizar de una manera específica para los ejercicios con razones trigonométricas*.

- *En primer lugar, debes fijarte en el* ***modo de la unidad angular*** *en la que estés trabajando. Generalmente, la unidad por omisión es el grado sexagesimal. Comprueba que en la pantalla de la calculadora aparezca la letra D o DEG. En caso contrario deberás pulsar la secuencia de teclas* SHIFT MODE (SET UP)

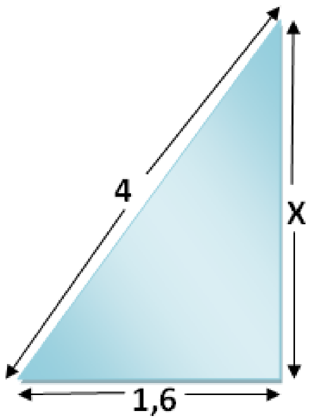
Y elegir DEG para trabajar con grados sexagesimales.

- Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo, pulsa la tecla correspondiente sin cos tan *y después el valor del ángulo.*
- *Si sabemos el valor de una razón trigonométrica y queremos averiguar el ángulo, tendremos que activar las funciones inversas con ayuda de la tecla SHIFT (en algunas calculadoras INV).*
- *En nuestro caso como vamos a calcular el valor de sen*$\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$= *0,5, debemos activar la función* ***SHIFT – seno – 0,5****. De esta manera nos da el valor del ángulo, el cual es de 30°, por lo tanto* $\boldsymbol{\theta = 30°}$

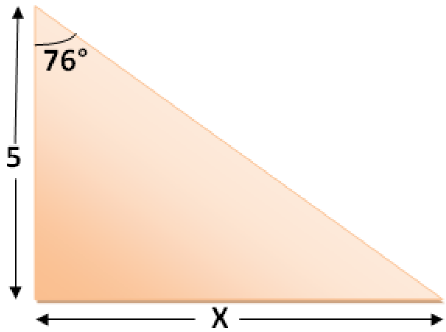
ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

En los siguientes triángulos, haciendo uso de las razones trigonométricas, hallar el valor de la incógnita.

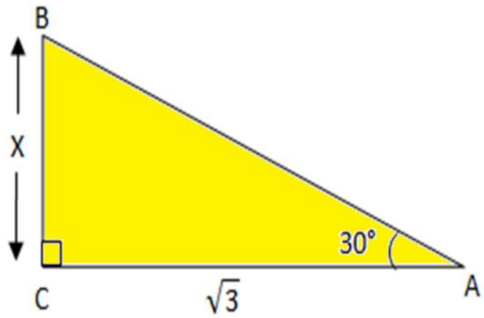
1.



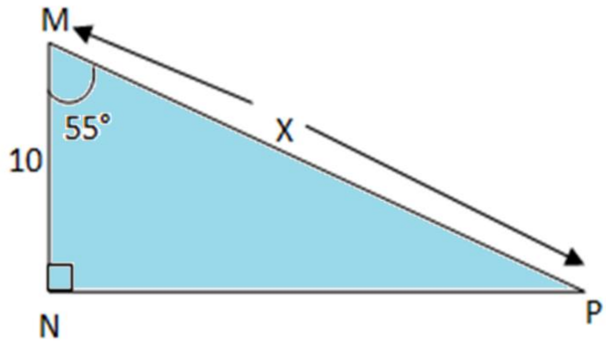
2.



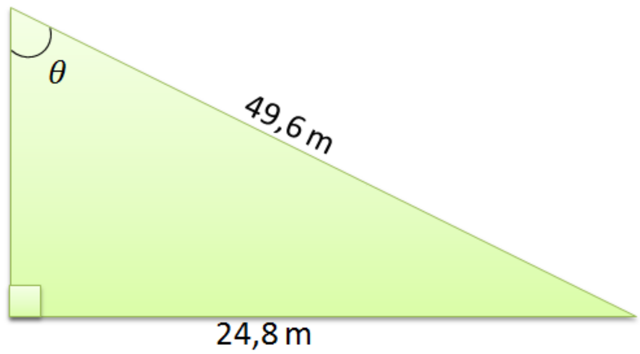
3.



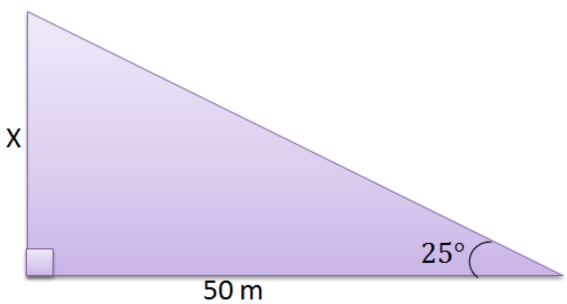
4.



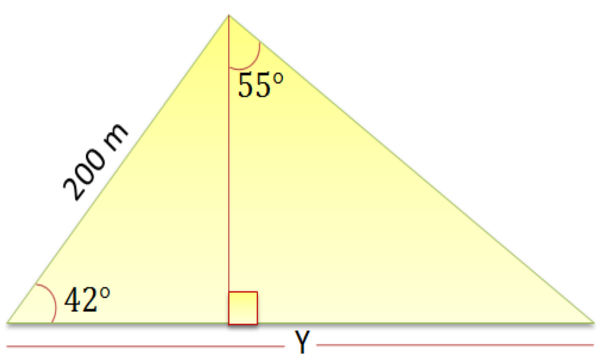
5.



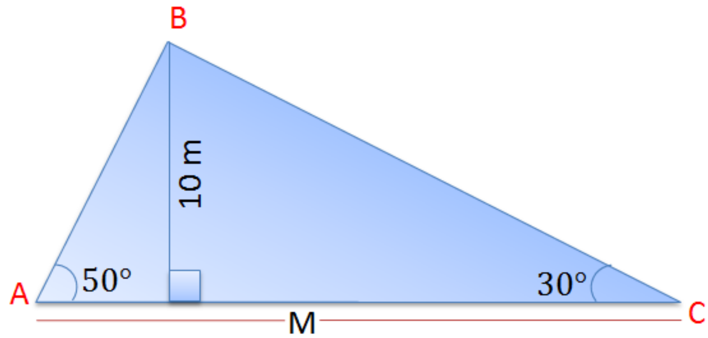
6.



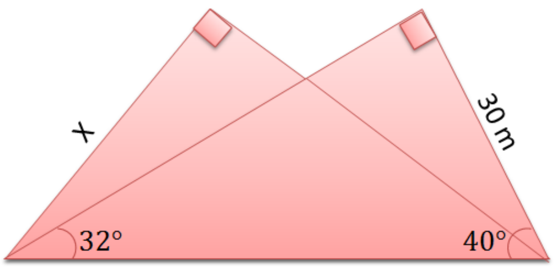
7.



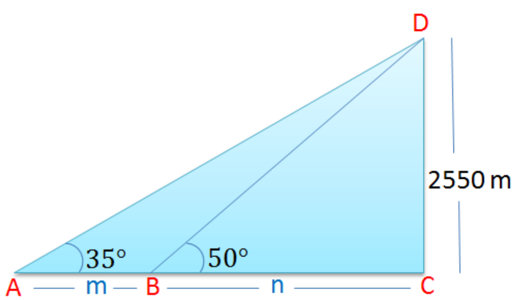
8.


B
10 m
A
50°
30°
C
M

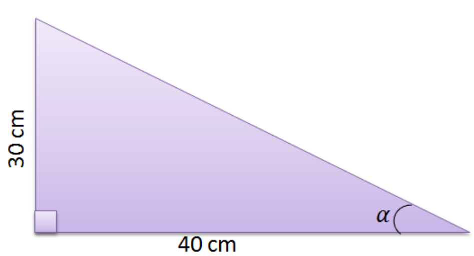
9.


x
30 m
32°
40°

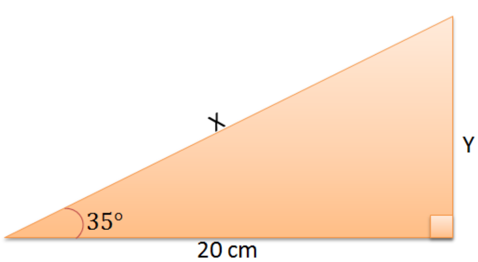
10.


D
2550 m
35°
50°
A
m
B
n
C

11.


30 cm
α
40 cm

12.


x
Y
35°
20 cm

BIBLIOGRAFÍA - CIBERGRAFÍA

Bibliografía: guía de aprendizaje.

Web grafía:

Página del área: www.matematicasefb.jimdofree.com

Plataforma Khan academy: https://es.khanacademy.org/

"Yo no estudio para saber más, sino para ignorar menos". Sor Juana Inés de la Cruz.