GEOMETRÍA ANALÍTICA

Docente:

María Cristina Marín Valdés

Estudiante:

____

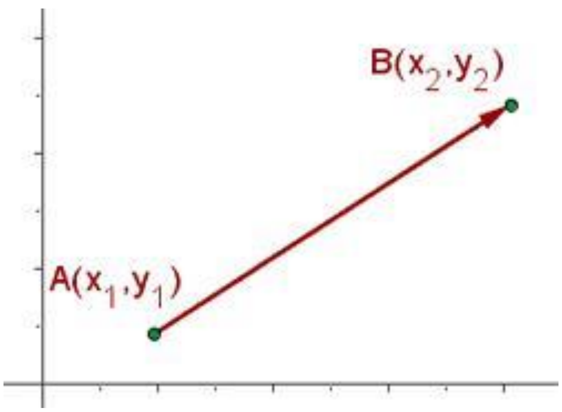
I.E.E.F.B

GEOMETRÍA ANALÍTICA

La geometría analítica es una rama de las matemáticas que estudia con profundidad las figuras, sus distancias, sus áreas, puntos de intersección, ángulos de inclinación, puntos de división, volúmenes, etc. Es un estudio más profundo para saber con detalle todos los datos que tienen las figuras geométricas. Para ello emplea técnicas básicas de análisis matemático y de álgebra.

DISTANCIA ENTRE PUNTOS

La **distancia entre dos puntos** equivale a la longitud del segmento de recta que los une, expresado numéricamente. **Distancia entre dos puntos**. Dados **dos puntos** cualesquiera A (x1, y1), B (x2, y2), definimos la **distancia** entre ellos, d (A, B), como la longitud del segmento que los separa.



FÓRMULA DE DISTANCIA ENTRE PUNTOS:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EJEMPLOS:

Ejemplo 1: Calcular la distancia entre los puntos A (-2, 5) y B (4, -3)

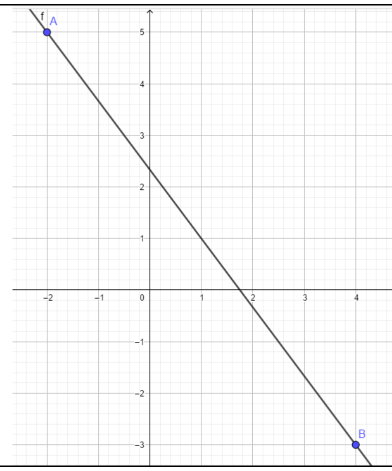
<u>Solución:</u>

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”:

A $(\overset{x_1,\,y_1}{-2,\ 5})$ y B $(\overset{x_2,\,y_2}{4,\ -3})$

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (-3 - 5)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(4 + 2)^2 + (-3 - 5)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{36 + 64} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{100} \rightarrow$$
$$d = 10 \rightarrow Respuesta$$



Ejemplo 2: Calcular la distancia entre los puntos A (4, 3) y B (3, 2)

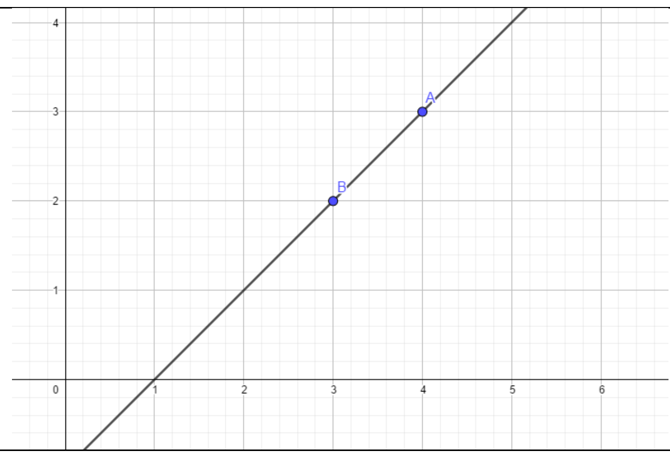
<u>Solución:</u>

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”:

A $(\overset{x_1,\,y_1}{4,\ 3})$ y B $(\overset{x_2,\,y_2}{3,\ 2})$

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(3 - 4)^2 + (2 - 3)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{1 + 1} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{2} \rightarrow Respuesta$$



Ejemplo 3: Calcular la distancia entre los puntos A (0, 1) y B (3, -1)

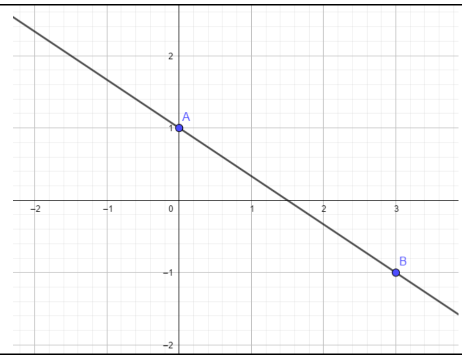
Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”:

A $(\overset{x_1,}{0}, \overset{y_1}{1})$ y B $(\overset{x_2,}{3}, \overset{y_2}{-1})$

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-1 - 1)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{9 + 4} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{13} \rightarrow Respuesta$$



Ejemplo 4: Calcular la distancia entre los puntos A (7, 3) y B (3, 7)

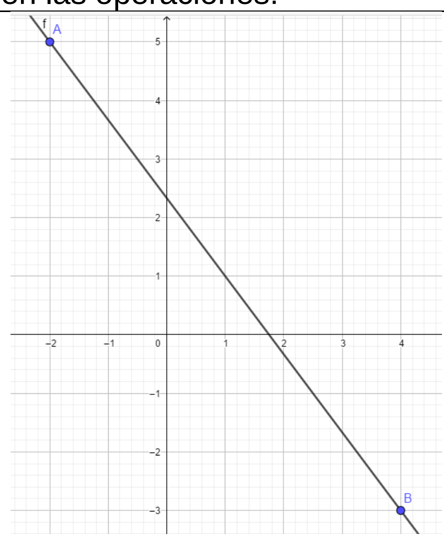
Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”:

A $(\overset{x_1,}{7}, \overset{y_1}{3})$ y B $(\overset{x_2,}{3}, \overset{y_2}{7})$

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(3 - 7)^2 + (7 - 3)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2} \quad d = \sqrt{16 + 16} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{32} \rightarrow Esta\ raíz\ no\ es\ exacta,\ debe\ descomponerse$$
$$d = 4\sqrt{2} \rightarrow Respuesta$$



PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO:

Es el punto que se encuentra a la misma distancia de otros dos puntos cualquiera o extremos de un segmento. Más generalmente punto equidistante en matemática, es el punto que se encuentra a la misma distancia de dos elementos geométricos, ya sean puntos, segmentos, rectas, etc. Para encontrar el punto medio de un segmento se calcula el promedio entre las coordenadas de cada uno de los ejes.

Pm= $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Ejemplo 5: Calcular el punto medio entre los puntos A (5, 2) y B (1, 6)

Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”:

A $(\overset{x_1, y_1}{5, 2})$ y B $(\overset{x_2, y_2}{1, 6})$

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$Xm = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow$$

$$Xm = \frac{5 + 1}{2} \rightarrow$$

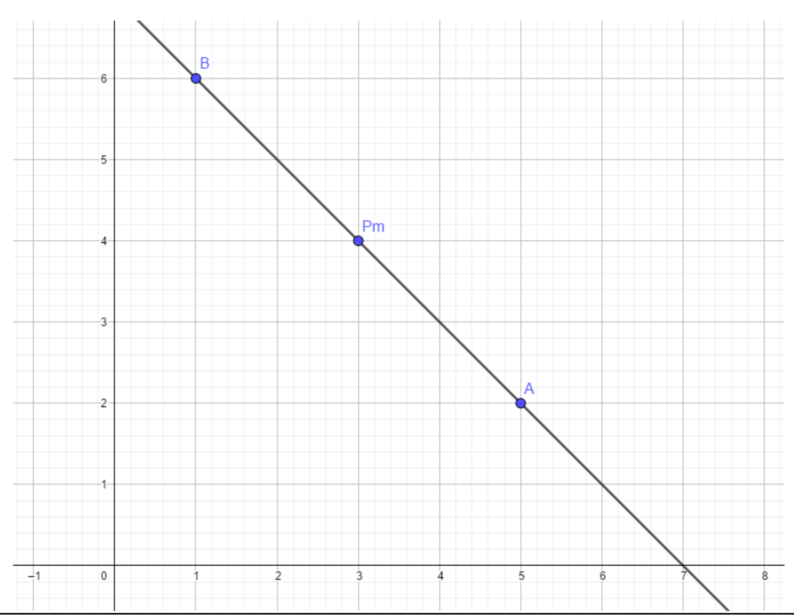
$$Xm = \frac{6}{2} \rightarrow Pm(x) = 3$$

$$Ym = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow$$

$$Ym = \frac{2 + 6}{2} \rightarrow$$

$$Ym = \frac{8}{2} \rightarrow Pm(x) = 4$$

Pm= (3, 4) $\rightarrow Respuesta$



Ejemplo 6: Calcular el punto medio entre los puntos A (-3, 7) y B (2, - 4)

Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”:

A $\overset{x_1, y_1}{(-3,\ 7)}$ y B $\overset{x_2, y_2}{(2,\ -4)}$

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$Xm = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow$$

$$Xm = \frac{-3 + 2}{2} \rightarrow$$

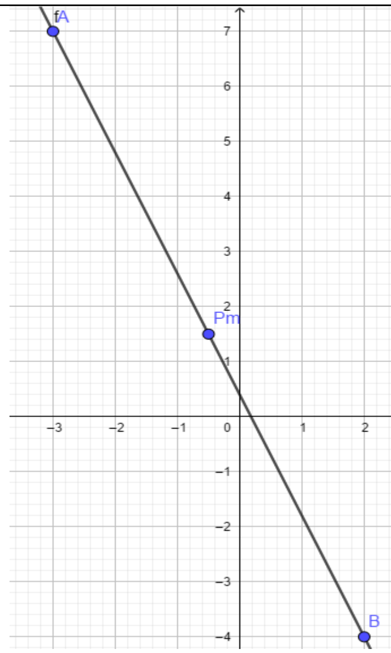
$$Xm = \frac{-1}{2} \rightarrow Pm(x) = \mathbf{\frac{-1}{2}}$$

$$Ym = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow$$

$$Ym = \frac{7 + (-4)}{2} \rightarrow$$

$$Ym = \frac{7 - 4}{2} \rightarrow Pm(y) = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

Pm= $\left(\frac{-1}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\right) \rightarrow Respuesta$



Ejemplo 7: Dado el punto P(-4, -5) y el punto medio (2,2). Hallar el punto Q (x_2, y_2)

Solución:

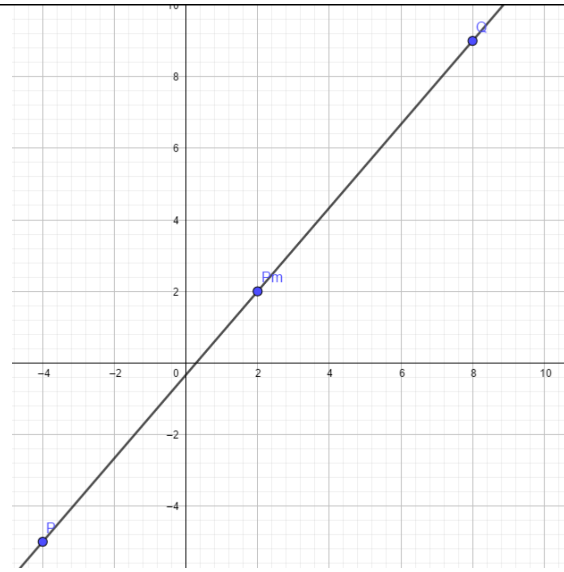
Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”. Teniendo en cuenta que en este ejercicio ya dan el punto medio.

P $\overset{x_1, y_1}{(-4,\ -5)}$ y Pm $\overset{x_2, y_2}{(2,\ 2)}$ Q (x_2, y_2)

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$Xm = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow$$
$$2 = \frac{-4 + x_2}{2} \rightarrow$$
$$4 = -4 + x_2 \rightarrow$$
$$x_2 = 4 + 4 \rightarrow \boldsymbol{x_2 = 8}$$
$$Ym = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow$$
$$2 = \frac{-5 + y_2}{2} \rightarrow$$
$$4 = -5 + y_2 \rightarrow$$
$$y_2 = 4 + 5 \rightarrow \boldsymbol{y_2 = 9}$$

Q= $\mathbf{(8\,,9)} \rightarrow Respuesta$



Ejemplo 8: El punto medio de un segmento es (5,5), dado el punto A de coordenadas (-1, 3). Hallar el punto B.

Solución:

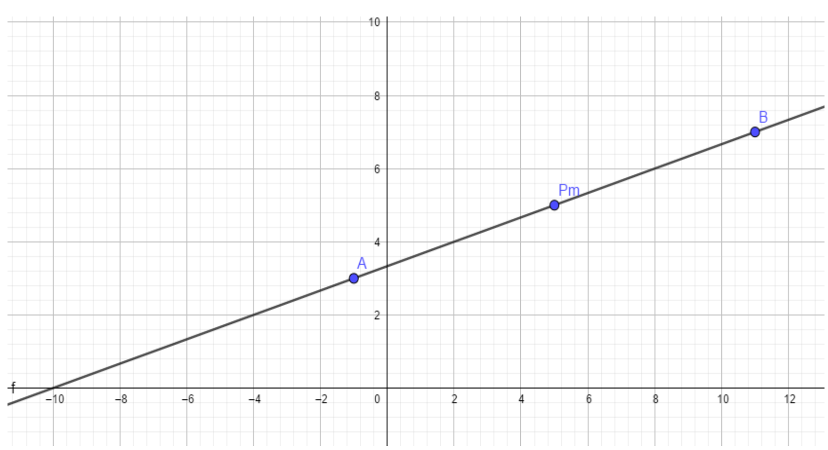
Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje "X" y el segundo número al eje "Y". Teniendo en cuenta que en este ejercicio ya dan el punto medio.

Pm $\overset{x_1, y_1}{(5,\ 5)}$ y A $\overset{x_2, y_2}{(-1,\ 3)}$; B (x_2, y_2)

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$Xm = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow$$
$$5 = \frac{-1 + x_2}{2} \rightarrow$$
$$10 = -1 + x_2 \rightarrow$$
$$x_2 = 10 + 1 \rightarrow \boldsymbol{x_2 = 11}$$
$$Ym = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow$$
$$5 = \frac{3 + y_2}{2} \rightarrow$$
$$10 = 3 + y_2 \rightarrow$$
$$y_2 = 10 - 3 \rightarrow \boldsymbol{y_2 = 7}$$

B= $\mathbf{(11\,,7)} \rightarrow Respuesta$



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN No.1

Haciendo uso del concepto de distancia entre puntos y punto medio de un segmento, dar solución a los siguientes ejercicios y representar gráficamente los puntos de coordenadas.

1. Hallar la distancia entre los puntos A (0,4) y B (9, -2).
2. Hallar la distancia entre los puntos A (2, -5) y B (1, -6).
3. Hallar la distancia entre los puntos (-3, -3) y (5, 2)
4. El punto medio de un segmento es $\left(\frac{7}{2}\ ,\ \frac{9}{2}\right)$, uno de los extremos es (2,3). Hallar el otro extremo.
5. Hallar la distancia y el punto medio dados los puntos A (0,6) y B -4, -2).
6. Hallar la distancia y el punto medio de un segmento cuyas coordenadas son el origen y el punto Q (5,7).

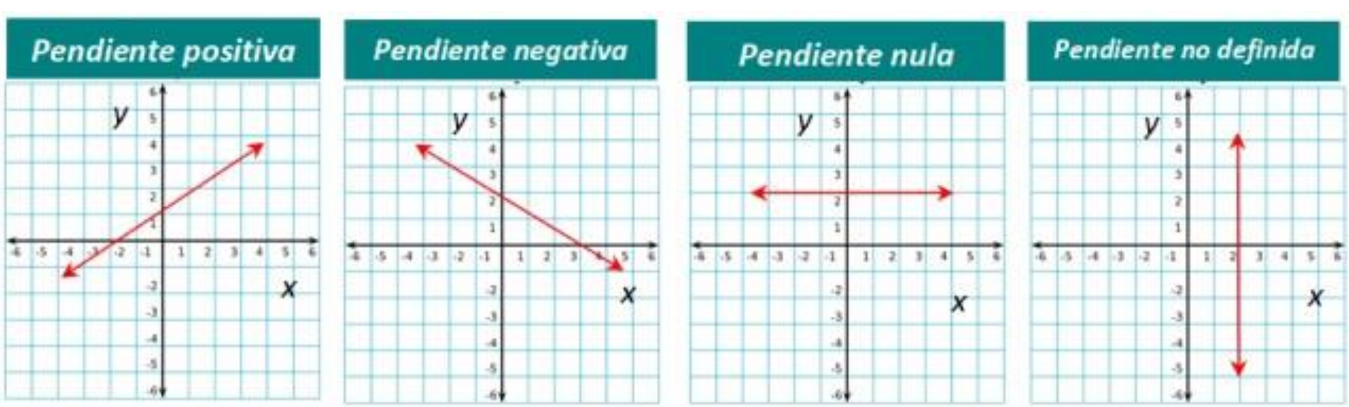
PENDIENTE DE LA RECTA

Conceptos básicos:

Inclinación: es el ángulo medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, formado por una recta y el eje positivo "X".

Pendiente: es la tangente del ángulo de inclinación de la recta. Si el ángulo de inclinación de una recta es de 90°, no está definida la pendiente, ya que tangente de 90° no existe. Si el ángulo de inclinación es de 180°, su pendiente será cero; si el ángulo es agudo la pendiente será positiva; si el ángulo es obtuso la pendiente de la recta será negativa.

Tipos de pendiente:



Cálculo de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ó } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

EJEMPLOS:

Ejemplo 1: Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (-4, 6) y B (6, -2)

<u>Solución:</u>

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”:

A $(\overset{x_1}{-4}, \overset{y_1}{6})$ y B $(\overset{x_2}{6}, \overset{y_2}{-2})$

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$$

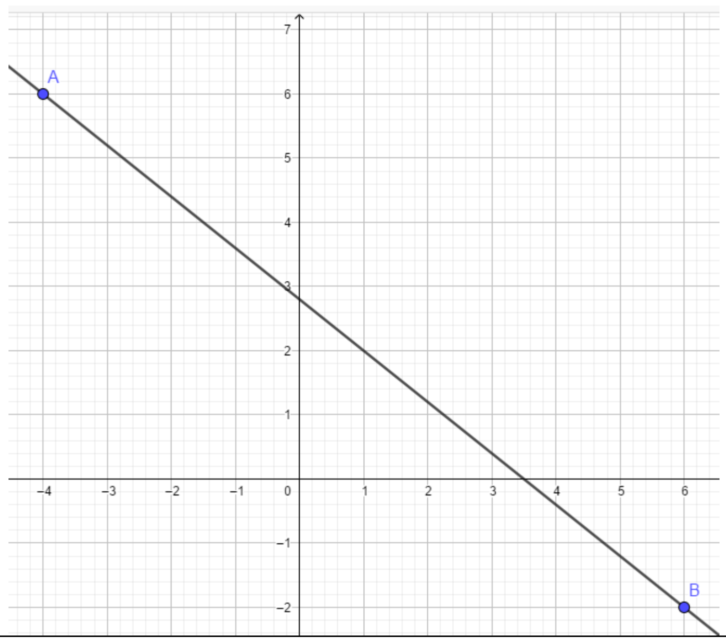
$$m = \frac{-2 - 6}{6 - (-4)} \rightarrow$$

$$m = \frac{-8}{6 + 4} \rightarrow$$

$$m = \frac{-8}{10}, se\ simplifica:$$

$$\boldsymbol{m = \frac{-4}{5}} \rightarrow Respuesta$$

Para calcular el ángulo de inclinación, se hace a través del ángulo de la tangente: $\tan^{-1}\left(\frac{-4}{5}\right) \rightarrow$
$\alpha = 141°$



<u>Conclusión:</u> la pendiente de este ejercicio es $\frac{-4}{5}$, corresponde a un ángulo obtuso de 141° y por lo tanto, el tipo de pendiente es negativa.

Ejemplo 2: Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos M (-1, -1) y N (4, 4)

Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”:

M $(\overset{x_1,\, y_1}{-1,\ -1})$ y N $(\overset{x_2,\, y_2}{4,\ 4})$

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$$

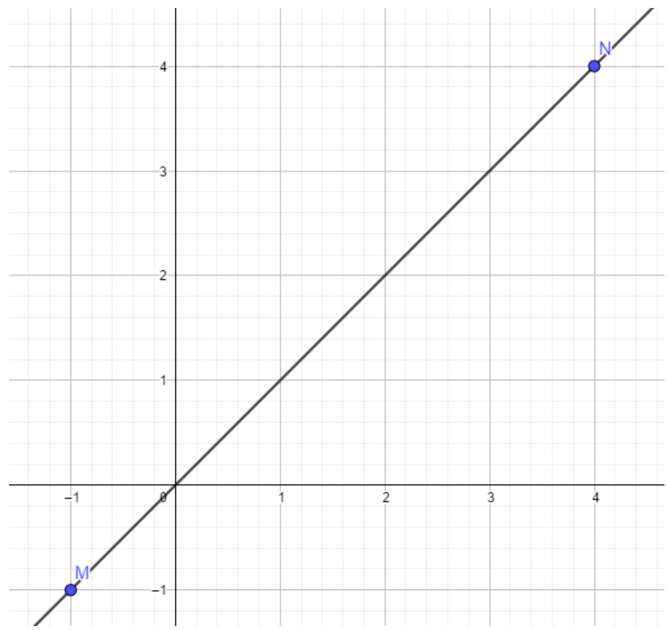
$$m = \frac{4-(-1)}{4-(-1)} \rightarrow$$

$$m = \frac{4+1}{4+1} \rightarrow$$

$$m = \frac{5}{5}, se\ simplifica:$$

$$\boldsymbol{m = 1} \rightarrow Respuesta$$

Para calcular el ángulo de inclinación, se hace a través del ángulo de la tangente: $\tan^{-1}(1) \rightarrow \alpha = 45°$



Conclusión: la pendiente de este ejercicio es 1, corresponde a un ángulo agudo de 45° y por lo tanto, el tipo de pendiente es positiva.

Ejemplo 3: Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (-3, -2) y B (4, -2)

Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”:

x_1, y_1 x_2, y_2
M (-3, -2) y N (4, -2)

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$$

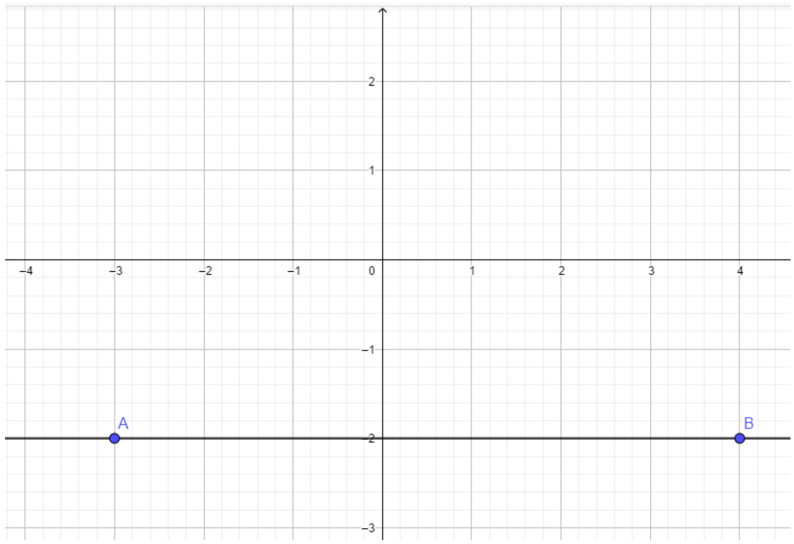
$$m = \frac{-2-(-2)}{4-(-3)} \rightarrow$$

$$m = \frac{-2+2}{4+3} \rightarrow$$

$$m = \frac{0}{7} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{m = 0} \rightarrow Respuesta$$

Para calcular el ángulo de inclinación, se hace a través del ángulo de la tangente: $\tan^{-1}(0) \rightarrow$ $\alpha = 0°$



Conclusión: la pendiente de este ejercicio es 0, corresponde a un ángulo agudo de 0° y por lo tanto, el tipo de pendiente es nula.

Ejemplo 4: Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (3, 4) y B (3, 3)

Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje "X" y el segundo número al eje "Y":

x_1, y_1 x_2, y_2
M (3, 4) y N (3, 3)

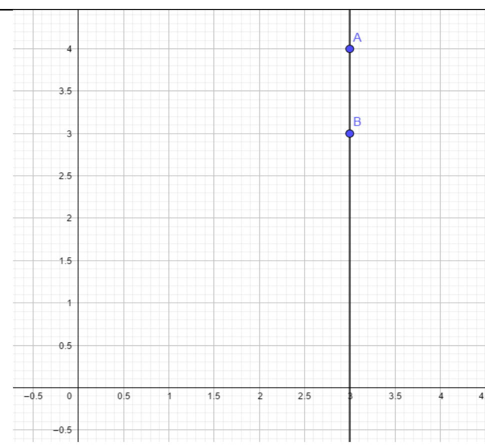
Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$$

$$m = \frac{3-4}{3-3} \rightarrow$$

$$m = \frac{-1}{0} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{m =} \infty \rightarrow Respuesta$$



Para calcular el ángulo de inclinación, se hace a través del ángulo de la tangente. En este caso, no se puede dividir por cero y nos dará una pendiente indefinida.	

Conclusión: la pendiente de este ejercicio se considera indefinida o nula.

PUNTOS COLINEALES:

Cuando la pendiente de AB es la misma que la de AC, los tres puntos están situados sobre la misma recta, por lo tanto, los puntos se consideran colineales.

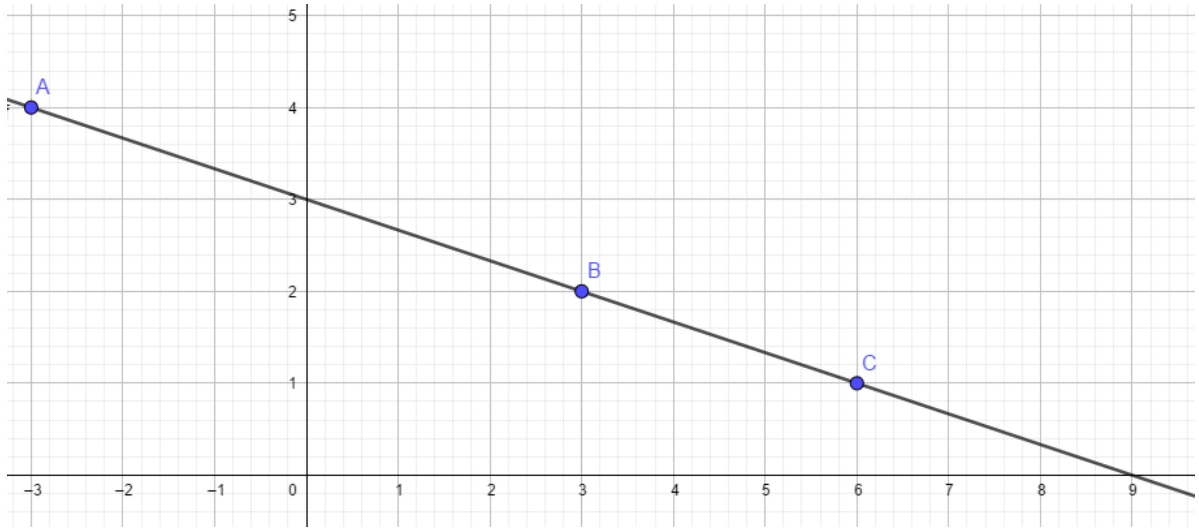
Ejemplo 5: Demostrar que los puntos A (-3, 4), B (3, 2) y C (6, 1) son colineales.

Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje "X" y el segundo número al eje "Y". Posteriormente, se calcula la pendiente entre los puntos A – B, A – C, B – C. Si las tres respuestas arrojan el mismo resultado, se considera que los puntos son colineales.

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

M (A – B)	M (A – C)	M (B – C)
x_1, y_1 $\quad$ x_2, y_2 A (-3, 4) y B (3, 2) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \frac{2-4}{3-(-3)} \rightarrow$ $m = \frac{-2}{3+3} \rightarrow$ $\boldsymbol{m} = \frac{-2}{6} \rightarrow \boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}$	x_1, y_1 $\quad$ x_2, y_2 A (-3, 4) y C (6, 1) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \frac{1-4}{6-(-3)} \rightarrow$ $m = \frac{-3}{6+3} \rightarrow$ $\boldsymbol{m} = \frac{-3}{9} \rightarrow \boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}$	x_1, y_1 $\quad$ x_2, y_2 A (3, 2) y C (6, 1) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \frac{1-2}{6-3} \rightarrow$ $\boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}$



<u>Conclusión:</u> los puntos pueden considerarse colineales, teniendo en cuenta que están contenidos en la misma recta, determinándose también con el mismo valor de la pendiente. Pendiente negativa, que corresponde a un ángulo obtuso.

RECTAS PARALELAS

Dos rectas no verticales son paralelas, sí y solamente sí, sus pendientes son iguales.

Ejemplo 6: Determinar si la recta L1 que pasa por los puntos P (1,5) y Q (-2,1) es paralela a la recta L2 que pasa por los puntos M (10,7) y N (7,3)

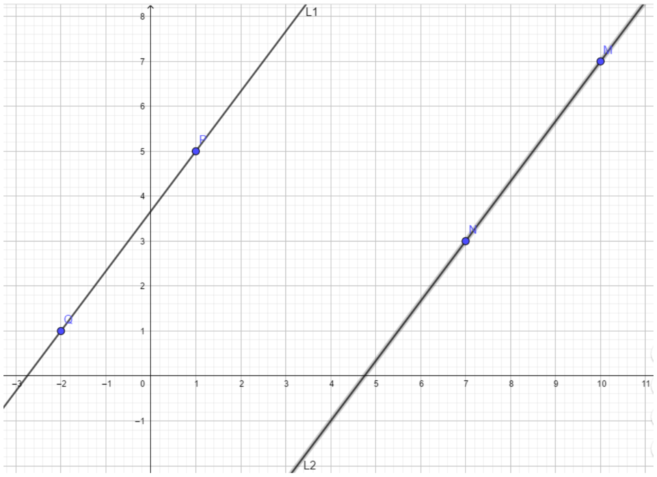
<u>Solución:</u>

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje "X" y el segundo número al eje "Y". Posteriormente, se calcula la pendiente entre los puntos de cada recta. Si las pendientes de ambas rectas dan el mismo resultado, entonces, se consideran que son paralelas.

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

Recta L1: M (P – Q) x_1, y_1 x_2, y_2 P (1, 5) y Q (-2, 1) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$	Recta L2: M (M – N) x_1, y_1 x_2, y_2 M (10, 7) y N (7, 3) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \dfrac{3-7}{7-10} \rightarrow$

$m = \frac{1-5}{-2-1} \rightarrow$ $m = \frac{-4}{-3} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = \frac{4}{3}}$	$m = \frac{-4}{-3} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = \frac{4}{3}}$



<u>Conclusión:</u> Como se puede observar en la gráfica, las rectas son paralelas, quedan frente a frente y por más que se prolongan nunca se van a cruzar. Igualmente, los resultados de las pendientes dieron el mismo resultado (4/3).

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas no verticales son perpendiculares, sí y solamente sí, el producto (multiplicación) de sus pendientes es igual a menos uno (-1).

Ejemplo 7: Determinar si la recta L1 que pasa por los puntos A (-2, 3) y B (3, 5) es perpendicular a la recta L2 que pasa por los puntos C (2, -1) y D (-4, 14).

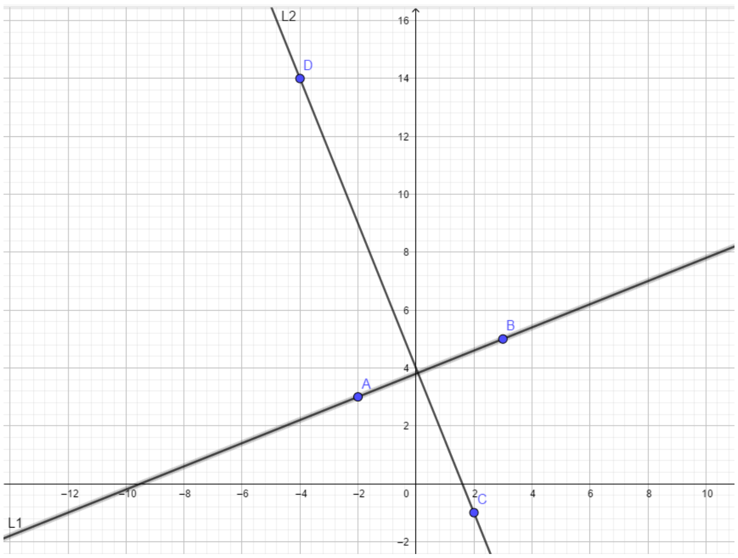
<u>Solución:</u>

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje "X" y el segundo número al eje "Y". Posteriormente, se calcula la pendiente entre los puntos de cada recta. Si al multiplicar los resultados de ambas pendientes, el producto da como resultado -1, se considera que estas rectas son perpendiculares.

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

Recta L1: M (A – B) x_1, y_1 $\quad$ x_2, y_2 A (-2, 3) y B (3, 5)	Recta L2: M (C – D) x_1, y_1 $\quad$ x_2, y_2 C (2, -1) y D (-4, 14)

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \dfrac{5-3}{3-(-2)} \rightarrow$ $m = \dfrac{2}{3+2} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = \dfrac{2}{5}}$	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \dfrac{14-(-1)}{-4-2} \rightarrow$ $m = \dfrac{14+1}{-6} \rightarrow m = \dfrac{15}{-6} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = \dfrac{5}{-2}}$
Se calcula el producto de ambas pendientes: $\dfrac{2}{5}\ x\ \dfrac{5}{-2} = \dfrac{10}{-10} = \boldsymbol{-1}$	



Conclusión: Como se puede observar en la gráfica, las rectas son perpendiculares, se cortan formando un ángulo recto (90°). Igualmente, el producto de los resultados de las pendientes es igual a -1.

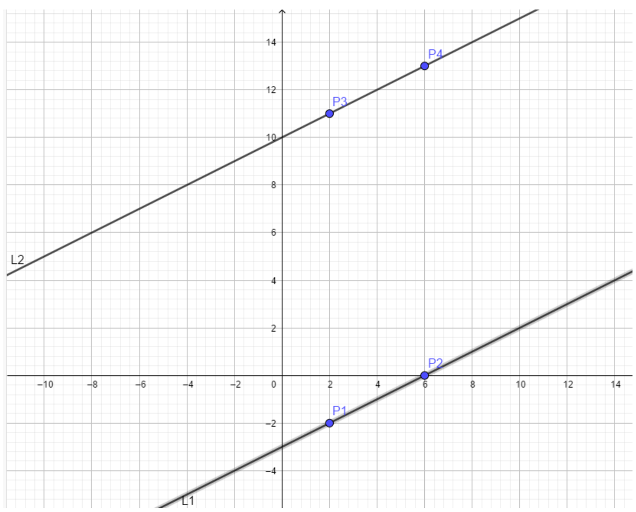
Ejemplo 8: Dadas las rectas L1 que pasa por los puntos P1 (2, -2) y P2 (6, 0) y la recta L2 que pasa por los puntos P3 (2, 11) y P4 (6, 13). ¿qué clase de rectas son?

Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”. Posteriormente, se calcula la pendiente entre los puntos de cada recta. Si los resultados de las pendientes de ambas rectas dan el mismo resultado, las rectas se consideran paralelas. Si los resultados de las pendientes son diferentes y al multiplicarlos, el producto da como resultado -1, se considera que estas rectas son perpendiculares.

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

Recta L1:	Recta L2:
M (P1 – P2) x_1, y_1 x_2, y_2 P1 (2, -2) y P2 (6, 0) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \frac{0-(-2)}{6-2} \rightarrow$ $m = \frac{0+2}{4} \rightarrow m = \frac{2}{4} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$	M (P3 – P4) x_1, y_1 x_2, y_2 P3 (2, 11) y P4 (6, 13) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \frac{13-11}{6-2} \rightarrow$ $m = \frac{2}{4} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$



Conclusión: Como se puede observar en la gráfica, las rectas son paralelas, quedan frente a frente y por más que se prolongan nunca se van a cruzar. Igualmente, los resultados de las pendientes dieron el mismo resultado (1/2).

Ejemplo 9: Dadas las rectas L1 que pasa por los puntos P1 (-3, -4) y P2 (5, 2) y la recta L2 que pasa por los puntos P3 (-2, 5) y P4 (4, -3). ¿qué clase de rectas son?

Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”. Posteriormente, se calcula la pendiente entre los puntos de cada recta. Si al multiplicar los resultados de ambas pendientes, el producto da como resultado -1, se considera que estas rectas son perpendiculares.

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

<table>
<tr>
<td>Recta L1:

M (P1 – P2)
$\qquad x_1, y_1 \qquad\quad x_2, y_2$
P1 (-3, -4) y P2 (5, 2)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$

$m = \frac{2-(-4)}{5-(-3)} \rightarrow$
$m = \frac{2+4}{5+3} \rightarrow m = \frac{6}{8}$

$\boldsymbol{m = \frac{3}{4}}$</td>
<td>Recta L2:

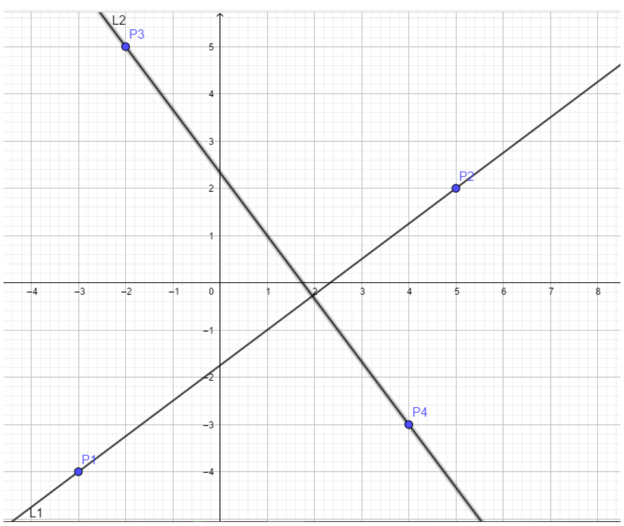
M (P3 – P4)
$\qquad x_1, y_1 \qquad\quad x_2, y_2$
P3 (-2, 5) y P4 (4, -3)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$

$m = \frac{-3-5}{4-(-2)} \rightarrow$
$m = \frac{-8}{4+2} \rightarrow m = \frac{-8}{6} \rightarrow$

$\boldsymbol{m = \frac{-4}{3}}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Se calcula el producto de ambas pendientes:

$\frac{3}{4}\ x\ \frac{-4}{3} = \frac{-12}{12} = \boldsymbol{-1}$</td>
</tr>
</table>



<u>Conclusión:</u> Como se puede observar en la gráfica, las rectas son perpendiculares, se cortan formando un ángulo recto (90°). Igualmente, el producto de los resultados de las pendientes es igual a -1.

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN No.2

Haciendo uso del concepto de pendiente de la recta y rectas paralelas y perpendiculares, dar solución a los siguientes ejercicios y representar gráficamente los puntos de coordenadas.

1. Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (-8,-4) y B (5, 9). Graficar y determinar qué clase de pendiente es.
2. Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (10,-3) y B (14, -7). Graficar y determinar qué clase de pendiente es.
3. Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (8, 6) y B (14, 6). Graficar y determinar qué clase de pendiente es.
4. Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (5,5) y B (-2, -3). Graficar y determinar qué clase de pendiente es.
5. Determinar si los siguientes puntos son colineales: A (1,1), B (-2, -2) y C (3,3). Representar gráficamente.
6. Establecer si las parejas de rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las anteriores: L1: A (-4, 1) B (2,6); L2: C (2,4) D (-1, -3).
7. Establecer si las parejas de rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las anteriores: L1: A (4, 4) B (-3,-3); L2: C (-5,5) D (4, -4).
8. Establecer si las parejas de rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las anteriores: L1: A (2, 8) B (0,2); L2: C (1,2) D (-2, -7).

ECUACIÓN DE LA RECTA

DEFINICIÓN: Una ecuación de la recta se puede encontrar de diversas formas, dependiendo de la información que se tenga. Una recta queda bien determinada cuando se conoce su ecuación definida en las variables “X” y “Y”, de tal manera que sea de primer grado.

PUNTOS EN LA RECTA: cuando al reemplazar las coordenadas se obtiene una igualdad, el punto sí pertenece a la recta.

EJEMPLOS:

1. Sea la recta L, cuya ecuación es 2X – 3Y= 6, comprobar que el punto (-3, -4) pertenece a la recta y graficar.

Solución:

$Punto = (-3, -4) \rightarrow X = -3, Y = -4$

Se reemplaza en la ecuación:

$2x - 3y = 6$

$2(-3) - 3(-4) = 6$

$-6-12=6$

$6=6$ Sí pertenecen los puntos a la recta

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

X	Y
0	-2
3	**0**

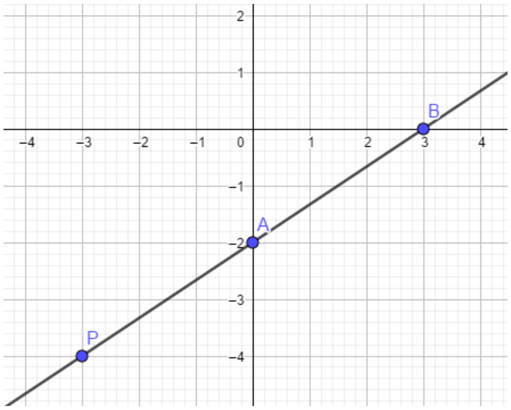
Cuando "X" vale 0:

$2x-3y=6$
$2(0)-3y=6$
$0-3y=6$
$-3y=6$
$y=\frac{6}{-3}\rightarrow y=\mathbf{-2}$

Cuando "Y" vale 0:

$2x-3y=6$
$2x-3(0)=6$
$2x-0=6$
$2x=6$
$x=\frac{6}{2}\rightarrow y=\mathbf{3}$

Finalmente se traza la recta y se ubica el punto P(-3,-4)



2. Determinar si los siguientes puntos pertenecen a la recta $Y=\frac{3}{4}x-1.$ Graficar

A (0,0) B. (4,2) C. (0,-1) D. (-1, -7/4)

<u>Solución:</u>

$Punto\ A\ (0,0)\rightarrow X=\ 0, Y=\ 0$

Se reemplaza en la ecuación:

$$Y = \frac{3}{4}x - 1$$

$$0 = \frac{3}{4}(0) - 1$$

$$0 = 0 - 1$$

$0 = -1$ **No** pertenece el punto A a la recta

$Punto\ B\ (4, 2) \rightarrow X = 4, Y = 2$

Se reemplaza en la ecuación:

$$Y = \frac{3}{4}x - 1$$

$2 = \frac{3}{4}(4) - 1, se\ puede\ simplificar\ el\ 4, cancelando\ en\ el\ numerador\ y\ denominador$

$$2 = 3 - 1$$

$2 = 2$ **Sí** pertenece el punto B a la recta

$Punto\ C\ (0, -1) \rightarrow X = 0, Y = -1$

Se reemplaza en la ecuación:

$$Y = \frac{3}{4}x - 1$$

$$-1 = \frac{3}{4}(0) - 1$$

$$-1 = 0 - 1$$

$-1 = -1$ **Sí** pertenece el punto C a la recta

$Punto\ D\ \left(-1, \frac{-7}{4}\right) \rightarrow X = -1, Y = \frac{-7}{4}$

Se reemplaza en la ecuación:

$$\frac{-7}{4} = \frac{3}{4}(-1) - 1$$

$$\frac{-7}{4} = \frac{-3}{4} - \frac{1}{1} \rightarrow \frac{-7}{4} = \frac{-3-4}{4} \rightarrow$$

$\frac{-7}{4} = \frac{-7}{4}$ **Sí** pertenece el punto D a la recta

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

X	Y
0	-1
4/3	**0**

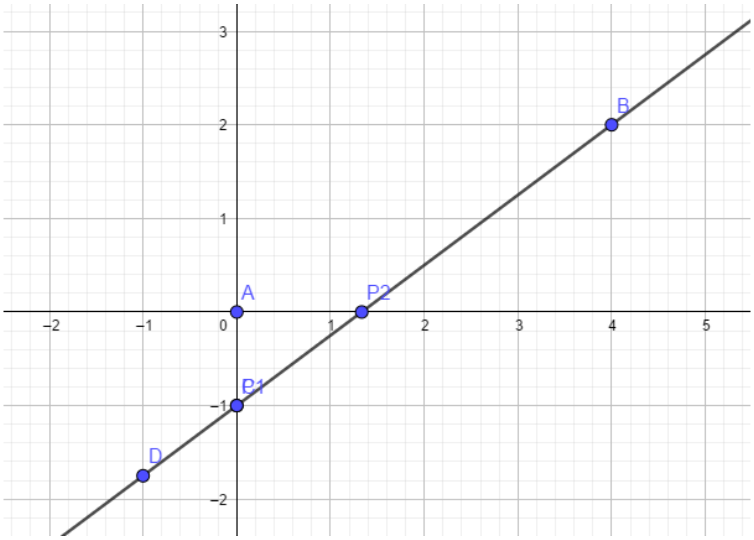
Cuando "X" vale 0:

$$y = \frac{3}{4}x - 1$$
$$y = \frac{3}{4}(0) - 1$$
$$y = 0 - 1$$
$$y = \mathbf{-1}$$

Cuando "Y" vale 0:

$$y = \frac{3}{4}x - 1$$
$$0 = \frac{3}{4}x - 1$$
$$0 + 1 = \frac{3}{4}x$$
$$x = 1 \div \frac{3}{4}$$
$$x = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

Finalmente se traza la recta y se ubican los puntos



ECUACIÓN DE LA RECTA CUANDO SE CONOCE LA PENDIENTE Y UN PUNTO (FORMA PUNTO – PENDIENTE)

Una recta en particular tiene una pendiente dada, pasa por un número infinito e intercepta a cada uno de los ejes coordenados en un punto específico. Conocidas dos cualesquiera de estas condiciones, es posible determinar la ecuación de la recta que las cumple.

Para hallar la ecuación de la recta punto-pendiente se despejan los valores de la ecuación de pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow y_2 - y_1 = m\,(x_2 - x_1)$$

Finalmente, la ecuación se planteará de la siguiente manera: $y - y_1 = m\,(x - x_1)$, es importante tener en cuenta que se puede seleccionar el punto 1 o el punto 2 para aplicarlos en la ecuación.

EJEMPLOS:

1. Determinar la ecuación de la recta de pendiente -5 y que pasa por el punto (1, -2). Realizar la gráfica.

Solución:

Se determina la información básica que proporciona el ejercicio, m= - 5 punto A (1, -2), X1= 1, Y1= -2.

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$

$$y - (-2) = -5\,(x - 1) \rightarrow$$

$$y + 2 = -5x + 5 \rightarrow$$

$$y = -5x + 5 - 2 \rightarrow \boldsymbol{y = -5x + 3}$$

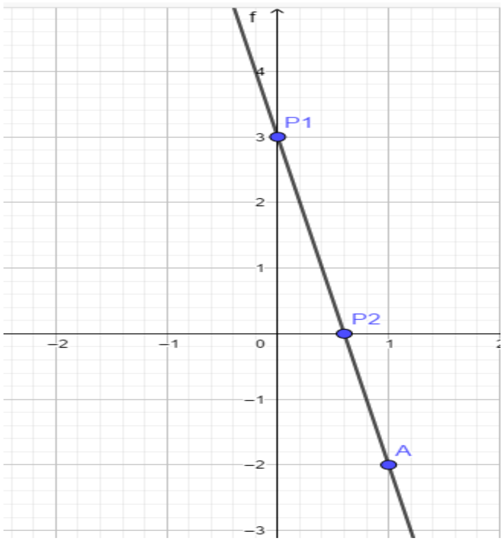
Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

X	Y
0	3
3/5	**0**

Cuando “X” vale 0:

$y = -5x + 3$
$y = -5(0) + 3$
$y = 0 + 3$
$y = \mathbf{3}$

Cuando “Y” vale 0:
$y = -5x + 3$
$0 = -5x + 3$
$0 - 3 = -5x$
$x = \frac{-3}{-5}$
$x = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$



2. Determinar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y pasa por el punto A (11,-8)

Solución:

Se determina la información básica que proporciona el ejercicio, m= - 3 punto A (11, -8), X1= 11, Y1= -8.

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$

$$y - (-8) = -3\,(x - 11) \rightarrow$$

$$y + 8 = -3x + 33 \rightarrow$$

$$y = -3x + 33 - 8 \rightarrow \boldsymbol{y = -3x + 25}$$

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

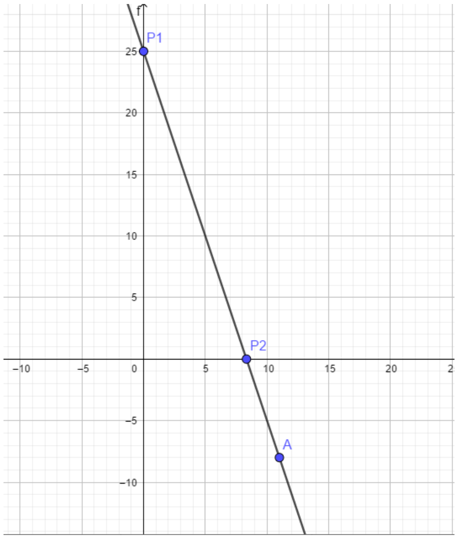
X	Y
0	25
25/3	**0**

Cuando “X” vale 0:

$y = -3x + 25$
$y = -3(0) + 25$
$y = 0 + 25$
$y = \mathbf{25}$

Cuando “Y” vale 0:

$y = -3x + 25$
$0 = -3x + 25$
$0 - 25 = -3x$
$x = \frac{-25}{-3}$
$x = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{3}}$



3. Determinar la ecuación de la recta de pendiente m= - 6, que pasa por el punto A (3, -2)

Solución:

Se determina la información básica que proporciona el ejercicio, m= - 6 punto A (3, -2), X1= 3, Y1= - 2.

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$

$$y - (-2) = -6\,(x - 3) \rightarrow$$

$$y + 2 = -6x + 18 \rightarrow$$

$$y = -6x + 18 - 2 \rightarrow \boldsymbol{y = -6x + 16}$$

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

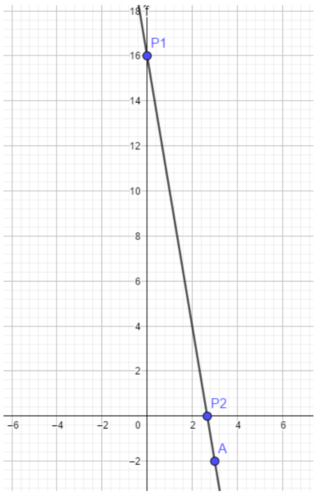
X	Y
0	16
8/3	**0**

Cuando "X" vale 0:

$$y = -6x + 16$$
$$y = -6(0) + 16$$
$$y = 0 + 16$$
$$y = \color{red}{16}$$

Cuando "Y" vale 0:

$$y = -6x + 16$$
$$0 = -6x + 16$$
$$0 - 16 = -6x$$
$$x = \frac{-16}{-6}$$
$$x = \color{red}{\boldsymbol{\frac{8}{3}}}$$



4. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (5, -1) y pendiente 1/2.

Solución:

Se determina la información básica que proporciona el ejercicio, m= 1/2 punto A (5, -1), X1= 5, Y1= - 1.

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$

$$y - (-1) = \frac{1}{2}\,(x - 5) \rightarrow$$

$$y + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} - \frac{1}{1}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5-2}{2} \rightarrow \color{red}{\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}}}$$

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

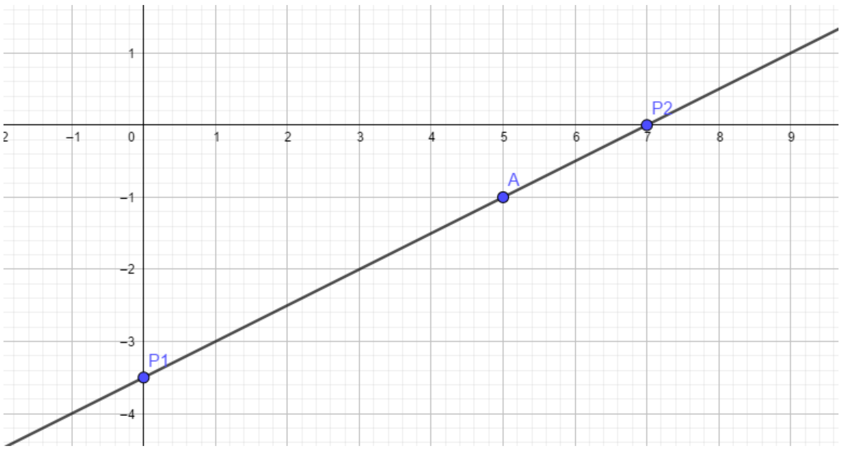
X	Y
0	-7/2
7	**0**

Cuando "X" vale 0:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}(0) - \frac{7}{2}$$
$$y = 0 - \frac{7}{2}$$
$$y = -\frac{7}{2}$$

Cuando "Y" vale 0:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$
$$0 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$
$$0 + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}x$$
$$x = \frac{7}{2} \div \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{14}{2}$$
$$x = 7$$



ECUACIÓN DE LA RECTA CONOCIDOS DOS PUNTOS, PERO NO LA PENDIENTE

Si se sabe que una recta L pasa por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, es posible encontrar la ecuación de la recta hallando la pendiente de la recta y posteriormente aplicando la forma punto – pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow y_2 - y_1 = m\,(x_2 - x_1)$$

EJEMPLOS:

1. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (2, -1) y B (1, -5)

Solución:

En primer lugar, se calcula la pendiente teniendo en cuenta los puntos que plantea el ejercicio:
A (2, -1), X1=2, Y1= -1, B (1, -5), X2= 1, Y2= -5

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{-5-(-1)}{1-2} \rightarrow m = \frac{-5+1}{-1} \rightarrow m = \frac{-4}{-1} \rightarrow \boldsymbol{m = 4}$$

Para calcular la ecuación se reemplazan los valores de pendiente y se selecciona uno de los puntos, en este caso se tomará el punto A (2, -1) y la pendiente obtenida que fue 4.

m= 4 punto A (2, -1), X1= 2, Y1= - 1.

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$

$$y - (-1) = 4\,(x - 2) \rightarrow$$

$$y + 1 = 4x - 8 \rightarrow$$

$$y = 4x - 8 - 1 \rightarrow \boldsymbol{y = 4x - 9}$$

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

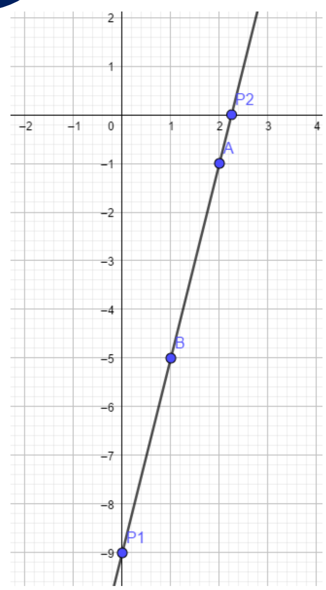
X	Y
0	-9
9/4	**0**

Cuando “X” vale 0:

$$y = 4x - 9$$
$$y = 4(0) - 9$$
$$y = 0 - 9$$
$$y = \boldsymbol{-9}$$

Cuando “Y” vale 0:

$$y = 4x - 9$$
$$0 = 4x - 9$$
$$0 + 9 = 4x$$
$$x = \boldsymbol{\frac{9}{4}}$$



2. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (3, -2) y B (2, -5). Calcular 2 puntos de referencia y realizar gráfica.

Solución:

En primer lugar, se calcula la pendiente teniendo en cuenta los puntos que plantea el ejercicio: A (3, -2), X1=3, Y1= -2, B (2, -5), X2= 2, Y2= -5

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{-5-(-2)}{2-3} \rightarrow m = \frac{-5+2}{-1} \rightarrow m = \frac{-3}{-1} \rightarrow \boldsymbol{m = 3}$$

Para calcular la ecuación se reemplazan los valores de pendiente y se selecciona uno de los puntos, en este caso se tomará el punto A (3, -2) y la pendiente obtenida que fue 3.

m= 3 punto A (3, -2), X1= 3, Y1= - 2

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$

$$y - (-2) = 3\,(x - 3) \rightarrow$$

$$y + 2 = 3x - 9 \rightarrow$$

$$y = 3x - 9 - 2 \rightarrow \boldsymbol{y = 3x - 11}$$

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

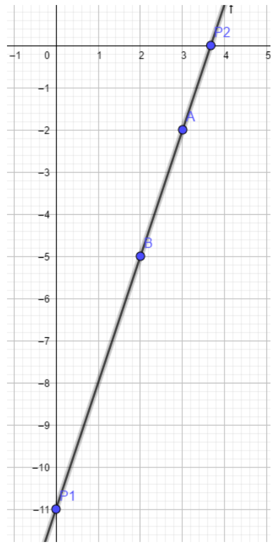
X	Y
0	-11
11/3	**0**

Cuando "X" vale 0:

$$y = 3x - 11$$
$$y = 3(0) - 11$$
$$y = 0 - 11$$
$$y = \mathbf{-11}$$

Cuando "Y" vale 0:

$$y = 3x - 11$$
$$0 = 3x - 11$$
$$0 + 11 = 3x$$
$$x = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}$$



3. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (3, -1) y B (-2, -3). Calcular puntos de referencia y realizar gráfica.

Solución:

En primer lugar, se calcula la pendiente teniendo en cuenta los puntos que plantea el ejercicio: A (3, -1), X1=3, Y1= -1, B (-2, -3), X2= -2, Y2= -3

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{-3-(-1)}{-2-3} \rightarrow m = \frac{-3+1}{-5} \rightarrow m = \frac{-2}{-5} \rightarrow \boldsymbol{m = \frac{2}{5}}$$

Para calcular la ecuación se reemplazan los valores de pendiente y se selecciona uno de los puntos, en este caso se tomará el punto A (3, -1) y la pendiente obtenida que fue 2/5.

m= 2/5 punto A (3, -1), X1= 3, Y1= - 1

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - \ y_1 = m\ (x - \ x_1) \rightarrow$$

$$y - (-1) = \frac{2}{5}\ (x - 3) \rightarrow$$

$$y + 1 = \frac{2}{5}x - \frac{6}{5} \rightarrow y = \frac{2}{5}x - \frac{6}{5} - \frac{1}{1}$$

$$y = \frac{2}{5}x - \frac{-6-5}{5} \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{2}{5}x - \frac{-11}{5}}$$

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

X	Y
0	-11/5
11/2	**0**

Cuando “X” vale 0:

$$y = \frac{2}{5}x - \frac{11}{5}$$

$$y = \frac{2}{5}(0) - \frac{11}{5}$$

$$y = 0 - \frac{11}{5}$$

$$y = -\boldsymbol{\frac{11}{5}}$$

Cuando “Y” vale 0:

$$y = \frac{2}{5}x - \frac{11}{5}$$

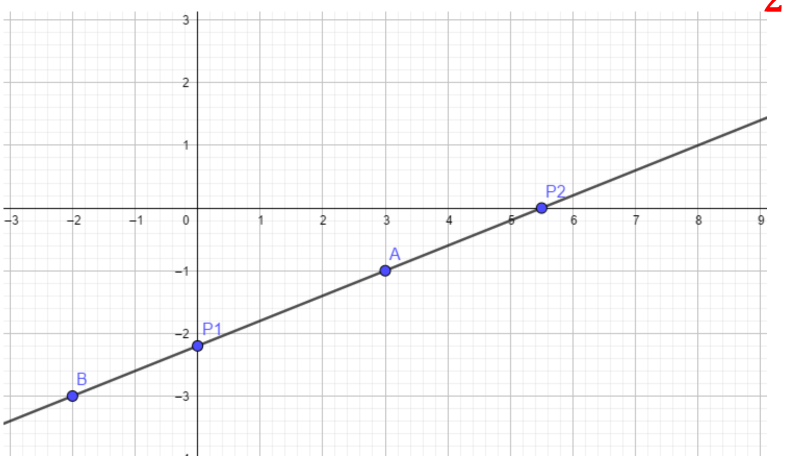
$$0 = \frac{2}{5}x - \frac{11}{5}$$

$$0 + \frac{11}{5} = \frac{2}{5}x$$

$$\frac{11}{5} \div \frac{2}{5} = x$$

$$\frac{11 \times 5}{2 \times 5} = x$$

$$x = \boldsymbol{\frac{11}{2}}$$



FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

Una ecuación en una o dos variables de primer grado igualadas a cero se llama forma general de la ecuación de la recta. Su expresión genérica es:

AX + BY + C = 0

A partir de la ecuación general de la recta se pueden obtener de manera directa los valores indicados en las siguientes expresiones:

Pendiente: $m = \frac{-A}{B}$

Abscisa al origen: $(x) = -\frac{C}{A}$

Ordenada al origen: $(y) = -\frac{C}{B}$

EJEMPLOS:

1. Hallar la ecuación general de la recta con m= -3 y A (-2, 3)

Solución:

Para calcular la ecuación se reemplazan los valores de pendiente y de las variables X e Y de acuerdo al punto:

m= -3 punto A (-2, 3), X1= -2, Y1= 3

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$
$y - 3 = -3\,(x - (-2)) \rightarrow$
$y - 3 = -3\,(x + 2)) \rightarrow$
$y - 3 = -3x - 6 \rightarrow$

Se pasan todos los valores a uno de los lados y en función de X y se igualan a cero

$y - 3 + 3x + 6 = 0 \rightarrow$
$\boldsymbol{3x + y + 3 = 0} \rightarrow \boldsymbol{Ecuación\ general}$
Ax + By + C = 0

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

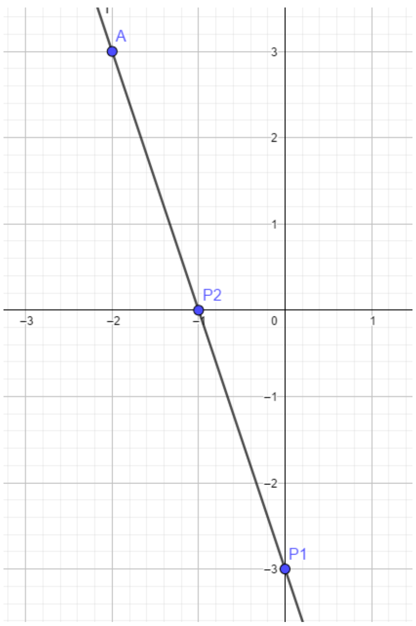
X	Y
0	-3
-1	**0**

Cuando "X" vale 0:

$$3x + y + 3 = 0$$
$$3(0) + y + 3 = 0$$
$$0 + y + 3 = 0$$
$$y + 3 = 0$$
$$\boldsymbol{y = -3}$$

Cuando "Y" vale 0:

$$3x + y + 3 = 0$$
$$3x + 0 + 3 = 0$$
$$3x + 3 = 0$$
$$3x = -3$$
$$x = \frac{-3}{3}$$
$$\boldsymbol{x = -1}$$



Ecuación general:

AX + By + C = 0

3x + y + 3 = 0

A= 3, B= 1, C= 3

Ordenada (eje Y)=

$$y = \frac{-C}{B} \rightarrow y = \frac{-3}{1} \rightarrow y = -3$$

Abscisa (eje X)=

$$x = \frac{-C}{A} \rightarrow x = \frac{-3}{3} \rightarrow x = -1$$

2. Encontrar la ecuación general de la recta con m= $\frac{1}{2}$ y el punto A (5, -1). Realizar gráfica.

Solución:

Para calcular la ecuación se reemplazan los valores de pendiente y de las variables X e Y de acuerdo al punto:

m= $\frac{1}{2}$ punto A (5, -1), X1= 5, Y1= -1

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$
$$y - (-1) = \frac{1}{2}\,(x - 5) \rightarrow$$
$$y + 1 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) \rightarrow$$
$$y + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \rightarrow$$
$$y + 1 = \frac{x-5}{2} \rightarrow se\ realiza\ el\ producto\ de\ extremos\ por\ medios$$
$$2y + 2 = x - 5 \rightarrow$$

Se pasan todos los valores a uno de los lados y en función de X y se igualan a cero

$$0 = x - 5 - 2y - 2 \rightarrow$$
$$\boldsymbol{x - 2y - 7 = 0 \rightarrow Ecuación\ general}$$

Ax + By + C = 0

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

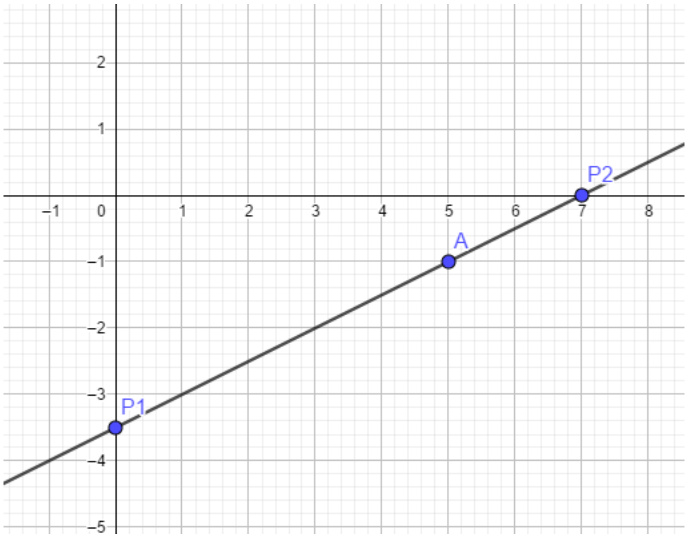
X	Y
0	-7/2
7	**0**

Cuando “X” vale 0:

$$x - 2y - 7 = 0$$
$$0 - 2y - 7 = 0$$
$$-2y = 0 + 7$$
$$y = \frac{7}{-2}$$
$$\boldsymbol{y = -\frac{7}{2}}$$

Cuando “Y” vale 0:

$$x - 2y - 7 = 0$$
$$x - 2(0) - 7 = 0$$
$$x - 0 - 7 = 0$$
$$x - 7 = 0$$
$$x = 0 + 7$$
$$\boldsymbol{x = 7}$$



Ecuación general:

AX + By + C = 0

x - 2y - 7 = 0

A= 1, B= -2, C= -7

Ordenada (eje Y)=

$$y = \frac{-C}{B} \rightarrow y = \frac{-(-7)}{-2} \rightarrow y = \frac{7}{-2} \rightarrow -\frac{7}{2}$$

Abscisa (eje X)=

$$a = \frac{-C}{A} \rightarrow b = \frac{-(-7)}{1} \rightarrow b = 7$$

3. Encontrar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos A (3, -5) y B (-2, 6). Realizar gráfica.

Solución:

Para calcular la ecuación primero se calcula la pendiente de acuerdo a los puntos dados.

A (3, - 5) X1=3, Y1= -5   B (-2, 6) X2= -2, Y2= 6

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{6-(-5)}{-2-3} \rightarrow m = \frac{6+5}{-5} \rightarrow m = \frac{11}{-5} \rightarrow \boldsymbol{m = \frac{-11}{5}}$$

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$
$$y - (-5) = \frac{-11}{5}\,(x-3) \rightarrow$$
$$y + 5 = \frac{-11}{5}\,(x-3) \rightarrow$$
$$y + 5 = \frac{-11}{5}x + \frac{33}{5} \rightarrow$$
$$y + 5 = \frac{-11x+33}{5} \rightarrow se\ realiza\ el\ producto\ de\ extremos\ por\ medios$$
$$5y + 25 = -11x + 33 \rightarrow$$

Se pasan todos los valores a uno de los lados y en función de X y se igualan a cero

$5y + 25 + 11x - 33 = 0 \rightarrow$

$\mathbf{11x + 5y - 8 = 0} \rightarrow \textit{\textbf{Ecuación general}}$

Ax + By + C = 0

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

X	Y
0	8/5
8/11	**0**

Cuando "X" vale 0:

$11x + 5y - 8 = 0$

$11(0) + 5y - 8 = 0$

$0 + 5y - 8 = 0$

$5y = 0 + 8$

$\boldsymbol{y = \frac{8}{5}}$

Cuando "Y" vale 0:

$11x + 5y - 8 = 0$

$11x + 5(0) - 8 = 0$

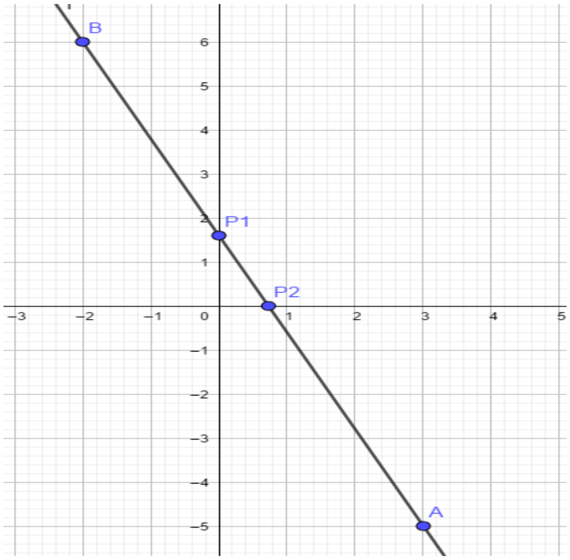
$11x + 0 - 8 = 0$

$11x - 8 = 0$

$11x = 0 + 8$

$11x = 8$

$\boldsymbol{x = \frac{8}{11}}$



Ecuación general:

AX + By + C = 0

11x + 5y - 8 = 0

A= 11, B= 5, C= -8

Ordenada (eje Y)=

$b = \frac{-C}{B} \rightarrow b = \frac{-(-8)}{5} \rightarrow b = \frac{8}{5}$

Abscisa (eje X)=

$a = \frac{-C}{A} \rightarrow b = \frac{-(-8)}{11} \rightarrow b = \frac{8}{11}$

4. En la siguiente ecuación determinar la pendiente, la abscisa y ordenada. Realizar la gráfica.

$$\mathbf{2x - y - 4 = 0}$$

Solución:

Se extraen los valores de la ecuación

$$\mathbf{2x - y - 4 = 0}$$

AX + By + C = 0

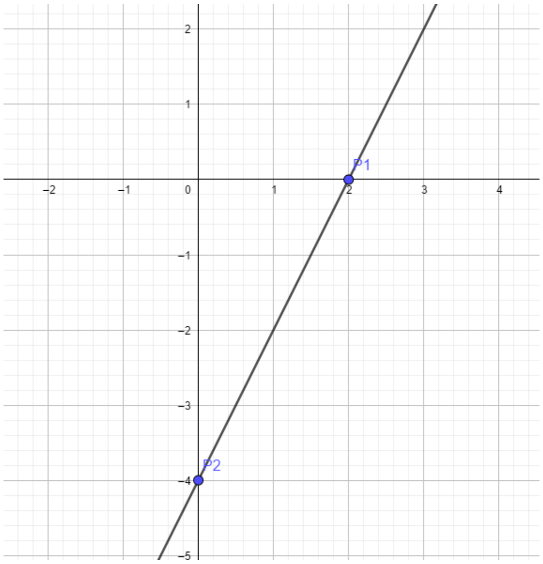
A= 2, B= -1, C= -4

Se reemplazan los anteriores valores en las expresiones:

Pendiente: $m = \frac{-A}{B} \rightarrow m = \frac{-2}{-1} \rightarrow m = 2$

Ordenada al origen: $b = -\frac{C}{B} \rightarrow b = \frac{-(-4)}{-1} \rightarrow b = \frac{4}{-1} \rightarrow b = -4$

Abscisa al origen: $a = -\frac{C}{A} \rightarrow a = \frac{-(-4)}{2} \rightarrow a = \frac{4}{2} \rightarrow a = 2$



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

Haciendo uso de los conceptos de ecuación de la recta, dar solución a los siguientes ejercicios y representar gráficamente los puntos de coordenadas.

1. Determinar si los puntos dados en cada caso pertenecen o no a la recta Y= 2x + 3

   A (-3, 3) B (0,3) C (-1, 1)

2. En los siguientes ejercicios encontrar la ecuación de la recta y representar gráficamente.

a) Pasa por el punto (2,0) y tiene pendiente 2.
b) Pasa por el punto (2,1) y tiene pendiente 1

3. Calcular la pendiente y graficar la ecuación y= x + 5

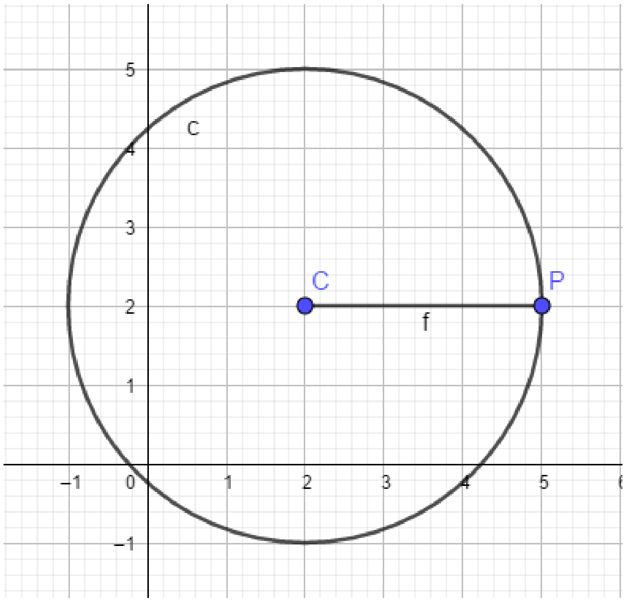
4. Graficar la ecuación y= -2x + 3

5. Escribir la ecuación general de la recta que pasa por los puntos A (1, 0) y B (3,6)

LA CIRCUNFERENCIA

Conceptos básicos:

<u>Definición:</u> La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. La distancia fija se llama radio de la circunferencia.



ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

Para determinar un punto sobre una circunferencia es preciso tener una expresión general que indique las condiciones para todo punto P (x, y) que pertenece a la curva.

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA CUANDO SE CONOCE EL CENTRO Y EL RADIO

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

h,k= son las coordenadas del centro

EJEMPLOS:

1. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro (2, 5) y radio 3

Solución:

Se extraen los valores de referencia del centro C (2, 5), h= 2 y k= 5

Se reemplazar los valores en la ecuación:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-2)^2+(y-5)^2=(3)^2 \rightarrow$

Se resuelven los productos notables:

$(x-2)^2+(y-5)^2=(3)^2 \rightarrow$

$(x)^2-2(x*2)+(2)^2+[(y)^2-2(y*5)+(5)^2=(3)^2 \rightarrow$

$x^2-4x+4+[y^2-10y+25]=9 \rightarrow$

$x^2-4x+4+y^2-10y+25=9$

Forma general de la ecuación de la circunferencia

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

Se agrupan los términos en función de la ecuación

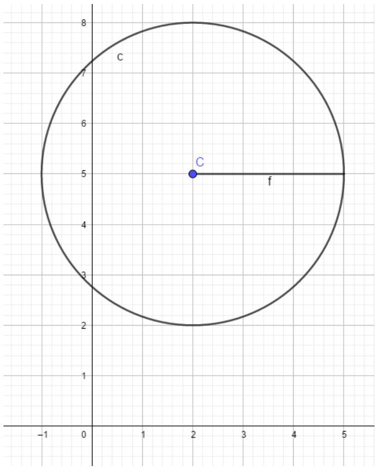
$x^2-4x+4+y^2-10y+25-9=0$

$x^2-4x+y^2-10y+25+4-9=0$

$x^2-4x+y^2-10y+20=0$

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

$\mathbf{x^2+y^2-4x-10y+20=0}$



2. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro (4,3) y radio 2. Graficar.

Solución:

Se extraen los valores de referencia del centro C (4, 3), h= 4 y k= 3

Se reemplazar los valores en la ecuación:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-4)^2+(y-3)^2=(2)^2 \rightarrow$

Se resuelven los productos notables:

$(x-4)^2+(y-3)^2=(2)^2 \rightarrow$

$(x)^2-2(x*4)+(4)^2+[(y)^2-2(y*3)+(3)^2=(2)^2 \rightarrow$

$x^2-8x+16+[y^2-6y+9]=4 \rightarrow$

$x^2-8x+16+y^2-6y+9=4$

Forma general de la ecuación de la circunferencia

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

Se agrupan los términos en función de la ecuación

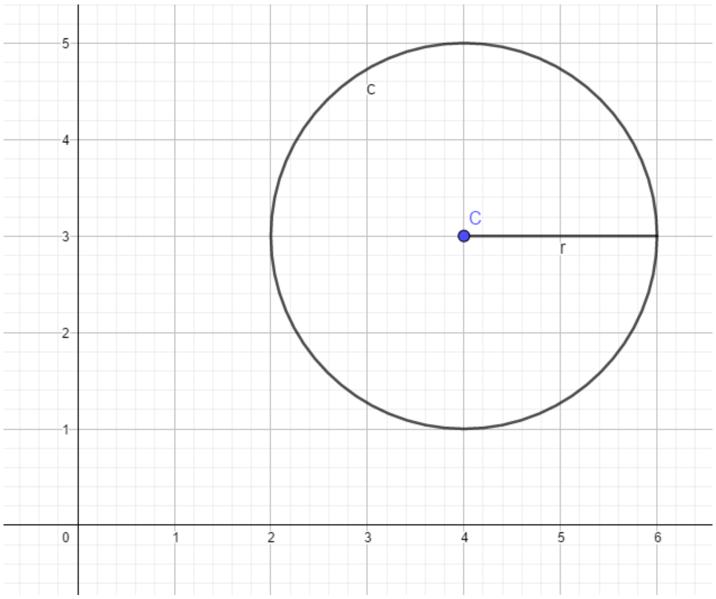
$x^2-8x+16+y^2-6y+9-4=0$

$x^2-8x+y^2-6y+9-4+16=0$

$x^2-8x+y^2-6y+21=0$

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

$\mathbf{x^2+y^2-8x-6y+21=0}$



3. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 1. Graficar.

Solución:

Se extraen los valores de referencia del centro C (0, 0), h= 0 y k= 0

Se reemplazar los valores en la ecuación:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-0)^2+(y-0)^2=(1)^2 \rightarrow$

Se resuelven los paréntesis:

$(x)^2+(y)^2=(1)^2 \rightarrow$

$x^2+y^2=1 \rightarrow$

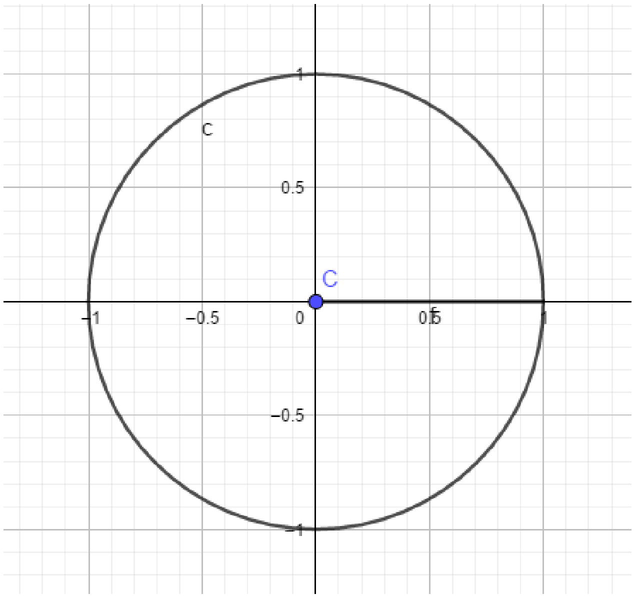
Forma general de la ecuación de la circunferencia

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

Se agrupan los términos en función de la ecuación

$x^2+y^2=1$

$\mathbf{x^2+y^2-1=0}$



ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA CONOCIDOS LOS EXTREMOS DEL DIÁMETRO

1. Encontrar la ecuación de la circunferencia en la cual los extremos de su diámetro son los puntos A (-4,2) y B (6,4)

Solución:

Se calculan las coordenadas del centro, haciendo uso de los puntos medios de X e Y.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \to x_m = \frac{-4 + 6}{2} \to x_m = \frac{2}{2} \to x_m = 1$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} \to y_m = \frac{2 + 4}{2} \to y_m = \frac{6}{2} \to y_m = \mathbf{3}$$

De esta manera, el centro de la circunferencia es el punto (1, 3)

Ahora se procede a calcular el valor del radio. El radio es la distancia del centro a un punto.

R=? C (1,3) A (-4 , 2), $x_1 = 1, y_1 = 3, x_2 = -4, y_2 = 2$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \to$$

$$d = \sqrt{(-4 - 1)^2 + (2 - 3)^2} \to d = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} \to d = \sqrt{25 + 1} \to$$

$$d = \sqrt{26}$$

C (1,3), h=1 y k= 3, A (-4,2), r= $\sqrt{26}$

Se reemplazar los valores en la ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{26})^2 \to$$

Se resuelven los productos notables y el paréntesis con el radical:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{26})^2 \to$$

$(x)^2 - 2(x * 1) + (1)^2 + [(y)^2 - 2(y * 3) + (3)^2 = (\sqrt{26})^2 \rightarrow$

$x^2 - 2x + 1 + [y^2 - 6y + 9] = 26 \rightarrow$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 26$

Forma general de la ecuación de la circunferencia

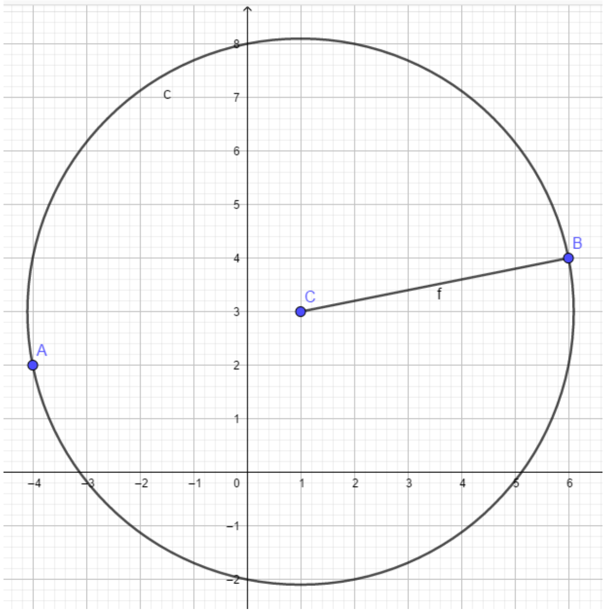
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Se agrupan los términos en función de la ecuación

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 26$

$x^2 - 2x + y^2 - 6y + 9 + 1 - 26 = 0$

$\mathbf{x^2 + y^2 - 2x - 6y - 16 = 0}$



2. Encontrar la ecuación general de la circunferencia en la cual los extremos de su diámetro son los puntos A (1, -2) y B (-3, -2).

Solución:

Se calculan las coordenadas del centro, haciendo uso de los puntos medios de X e Y.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x_m = \frac{-3 + 1}{2} \rightarrow x_m = \frac{-2}{2} \rightarrow x_m = -1$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow y_m = \frac{-2 + (-2)}{2} \rightarrow y_m = \frac{-4}{2} \rightarrow y_m = -2$$

De esta manera, el centro de la circunferencia es el punto (-1, -2)

Ahora se procede a calcular el valor del radio. El radio es la distancia del centro a un punto.

R=? C (-1,-2) A (1 , -2), $x_1 = -1, y_1 = -2, x_2 = 1, y_2 = -2$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \rightarrow$$

$$d = \sqrt{(1-(-1))^2 + \left(-2-(-2)\right)^2} \rightarrow d = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+2)^2} \rightarrow$$

$$d = \sqrt{(2)^2 + (0)^2} \rightarrow d = \sqrt{4} \rightarrow$$

$$d = \mathbf{2}$$

C (-1,-2), h=-1 y k= -2, A (1,-2), r= 2

Se reemplazar los valores en la ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-(-1))^2 + (y-(-2))^2 = (2)^2 \rightarrow$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = (2)^2 \rightarrow$$

Se resuelven los productos notables:

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = (2)^2 \rightarrow$$

$$(x)^2 + 2(x*1) + (1)^2 + [(y)^2 + 2(y*2) + (2)^2 = (2)^2 \rightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 + [y^2 + 4y + 4] = 4 \rightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 = 0 \rightarrow$$

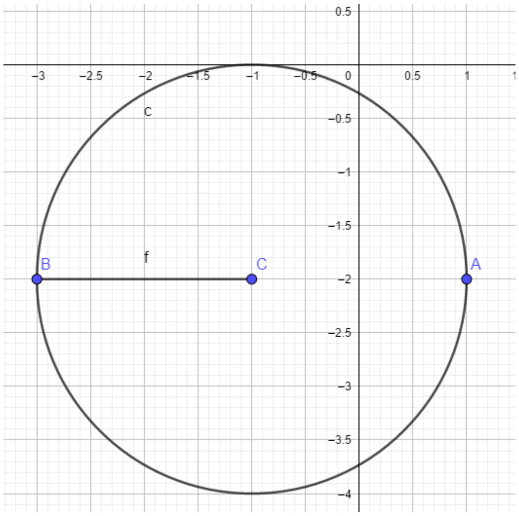
$$x^2 + 2x + y^2 + 4y + 4 - 4 + 1 = 0 \rightarrow Se\ hace\ reducción\ de\ términos\ semejantes$$

$$x^2 + 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$$

Se agrupan los términos en función de la ecuación

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0}$



DETERMINAR CENTRO Y RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA DADA LA ECUACIÓN

Para los datos requeridos se lleva la ecuación general a su forma ordinaria y se asocian los términos en “x” y en “y”, Ejemplo:

$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

Solución:

Se ordenan los términos en orden creciente:

$x^2 - 6x + y^2 + 2y + 1 = 0$

$(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = 0 - 1$

$(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = -1$

Se completan los trinomios cuadrados perfectos, para ello se toma la mitad del coeficiente de “x” y de “y” y se eleva al cuadrado; luego se suma a ambos lados de la ecuación y por último se factoriza.

Coeficiente de “x”= $\frac{6}{2} = 3$ Coeficiente de “y”= $\frac{2}{2} = 1$

Se completan los trinomios con los valores obtenidos anteriormente.

$$(x^2 - 6x + 3^2) + (y^2 + 2y + 1^2) = -1 + 3^2 + 1^2$$

Se factorizan los trinomios y se reducen los términos al otro lado del igual:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = -1 + 9 + 1 \rightarrow$$

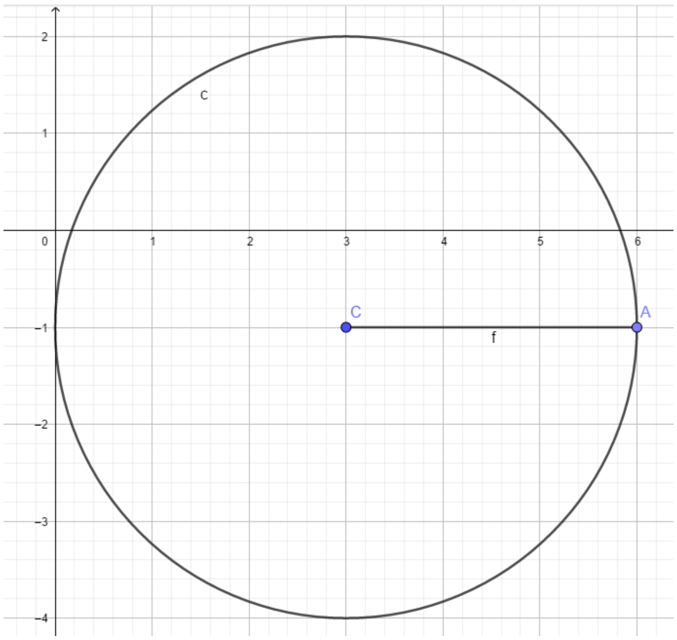
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$$

Se comparan los valores con la forma de la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

h= 3 k= -1 r= 3

El valor de "k" queda negativo porque se hace ley de signos entre el paréntesis de la ecuación y el de la fórmula. De esta manera, el centro de la ecuación es C (3, -1)



2. Encontrar el centro y el radio de la circunferencia definida por la ecuación:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$$

Solución:

Se ordenan los términos en orden creciente:

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y - 2 = 0$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) = 0 + 2$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) = 2$$

Se completan los trinomios cuadrados perfectos, para ello se toma la mitad del coeficiente de "x" y de "y" y se eleva al cuadrado; luego se suma a ambos lados de la ecuación y por último se factoriza.

Coeficiente de "x"= $\frac{2}{2} = 1$ Coeficiente de "y"= $\frac{2}{2} = 1$

Se completan los trinomios con los valores obtenidos anteriormente.

$$(x^2 - 2x + 1^2) + (y^2 - 2y + 1^2) = 2 + 1^2 + 1^2$$

Se factorizan los trinomios y se reducen los términos al otro lado del igual:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 + 1 + 1 \rightarrow$$

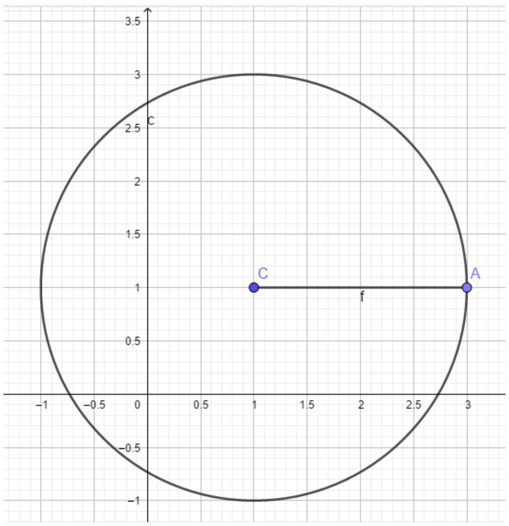
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Se comparan los valores con la forma de la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

h= 1 k= 1 r= 2

Para obtener el valor del radio se debe sacar la raíz cuadrada ($\sqrt{4} = 2$)



3. Encontrar el centro y el radio de una circunferencia, dada su ecuación general

$$x^2 + y^2 - 4x - 7y - 4 = 0$$

Solución:

Se ordenan los términos en orden creciente:

$$x^2 - 4x + y^2 - 7y - 4 = 0$$

$$(x^2 - 4x) + (y^2 - 7y) = 0 + 4$$

$$(x^2 - 4x) + (y^2 - 7y) = 4$$

Se completan los trinomios cuadrados perfectos, para ello se toma la mitad del coeficiente de "x" y de "y" y se eleva al cuadrado; luego se suma a ambos lados de la ecuación y por último se factoriza.

Coeficiente de "x"= $\frac{4}{2} = 2$

Coeficiente de "y"= $\frac{7}{2}$

Se completan los trinomios con los valores obtenidos anteriormente.

$$(x^2 - 4x + 2^2) + \left(y^2 - 7y + \left(\frac{7}{2}\right)^2\right) = 4 + 2^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

Se factorizan los trinomios y se reducen los términos al otro lado del igual:

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = 4 + 4 + \frac{49}{4} \rightarrow$$

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = 8 + \frac{49}{4} \rightarrow$$

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{32 + 49}{4} \rightarrow$$

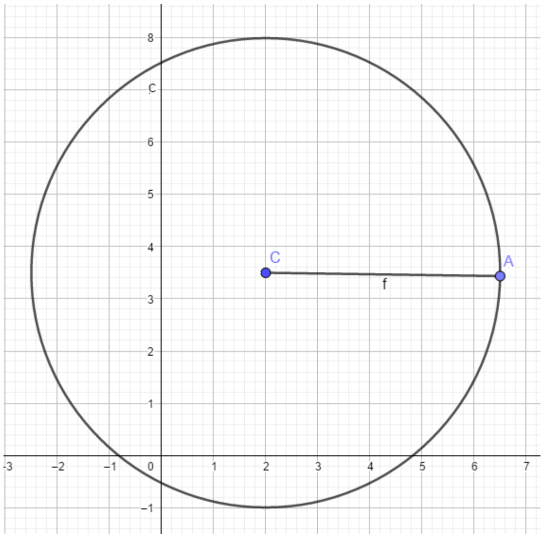
$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

Se comparan los valores con la forma de la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

h= 2 k= - $\frac{7}{2}$ r= $\frac{9}{2}$

Para obtener el valor del radio se debe sacar la raíz cuadrada $\sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$



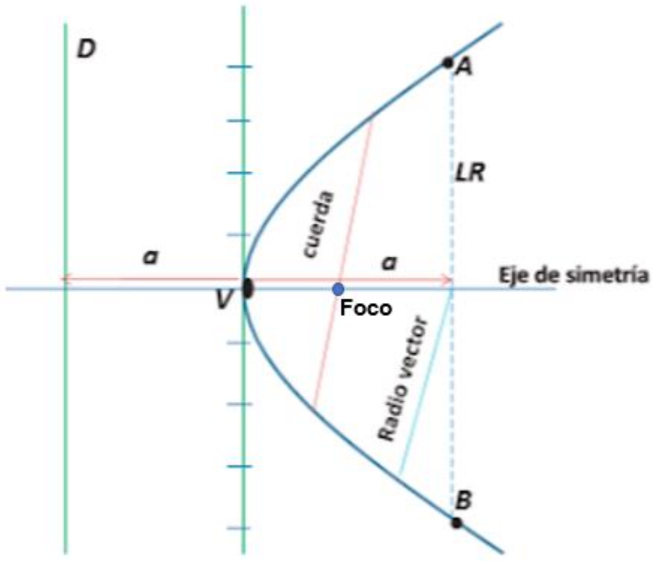
ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

1. Encontrar el centro y el radio de una circunferencia cuya ecuación es:
   $x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0$
2. Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro se halle en el origen y que pasa por el punto A (3,4).
3. Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$
4. Encontrar el centro, el radio y la ecuación general de una circunferencia cuyos extremos del diámetro son los puntos A (0,4) y B (6, -2)
5. Hallar el centro y el radio de una circunferencia cuya ecuación es:
   $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

LA PARÁBOLA

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de un punto fijo, llamado foco y una recta dada llamada directriz.

Elementos de la parábola



Directriz (D): recta que permite la construcción de la parábola.

Vértice (V): es el punto de intersección de la parábola con el eje de simetría.

Eje focal o eje de simetría: es la línea recta que divide simétricamente a la parábola en dos brazos y pasa por el vértice.

Foco (F): punto fijo que referencia, que no pertenece a la parábola y que se ubica en la misma y a una distancia p del vértice.

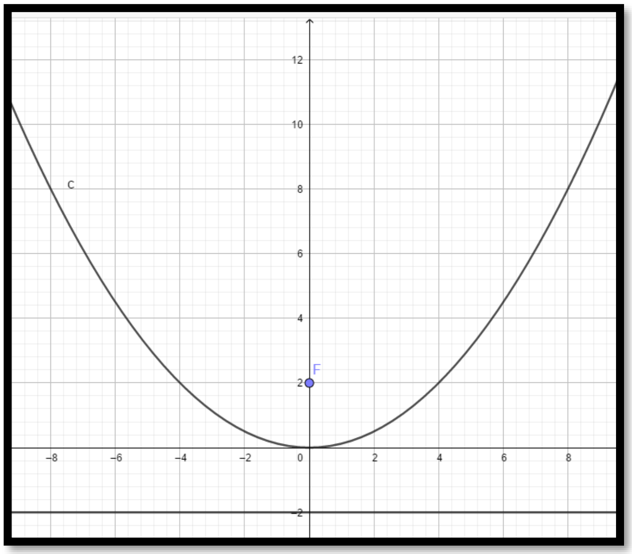
Cuerda: Segmento de recta que une dos puntos de la parábola. Si la cuerda pasa por el foco, se llama cuerda focal.

Lado recto (LR): Cuerda focal paralela a la directriz *D* y, por tanto, perpendicular al eje *E*. Su longitud es dos veces a.

a= es la distancia del origen al foco y del origen a la directriz, siempre será positiva.

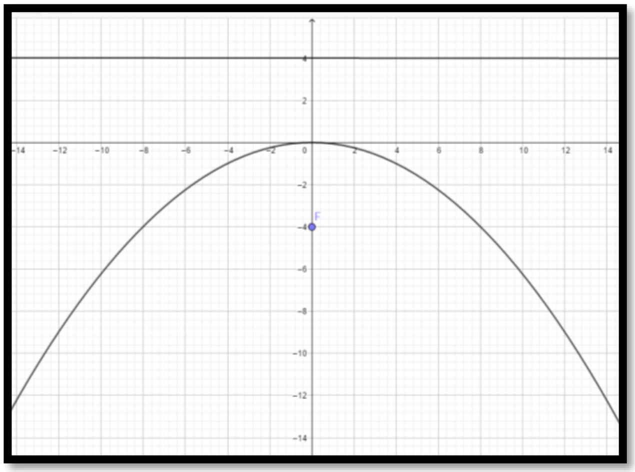
ECUACIONES DE LA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN

$x^2 = 4ay$



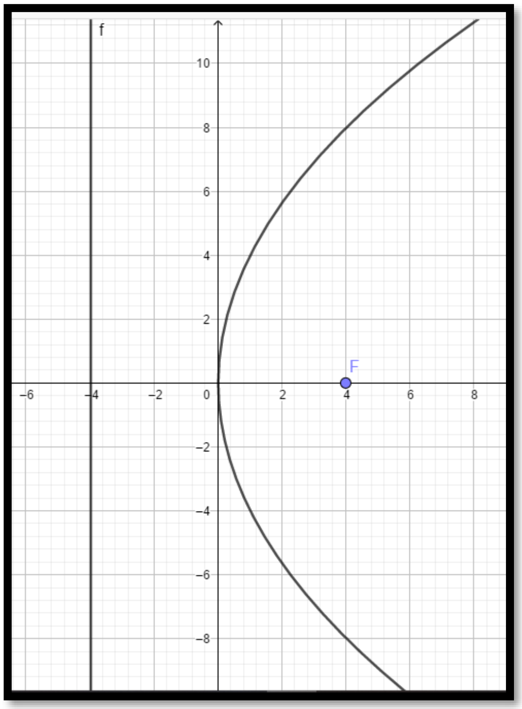
- Vértice en el origen.
- Ubicada sobre el eje Y.
- El foco está a una distancia a del vértice.
- La parábola se abre hacia arriba.

$x^2 = -\,4ay$



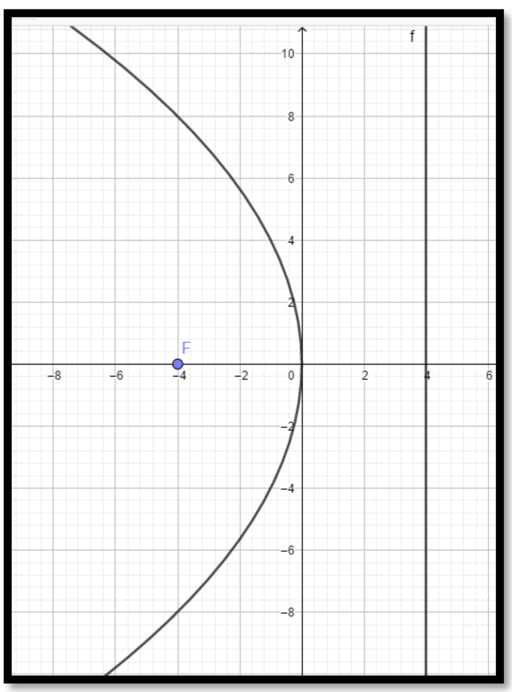
- Vértice en el origen.
- Ubicada sobre el eje Y.
- El foco está a una distancia a del vértice.
- La parábola se abre hacia abajo.

$$y^2 = 4ax$$



- Vértice en el origen.
- Ubicada sobre el eje X.
- El foco está a la derecha del vértice.
- La parábola se abre hacia la derecha.

$$y^2 = -4ax$$



- Vértice en el origen.
- Ubicada sobre el eje X.
- El foco está a la izquierda del vértice.
- La parábola se abre hacia la izquierda.

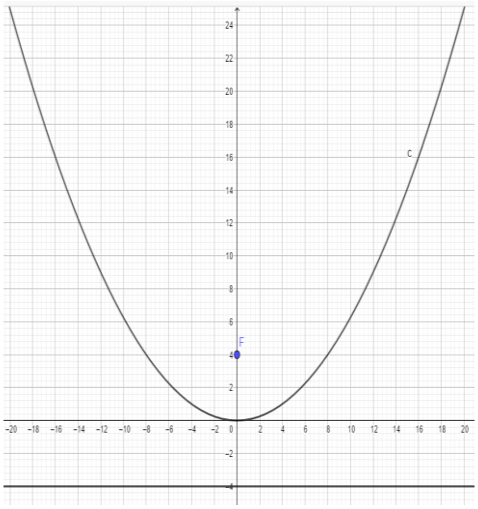
EJEMPLOS:

Graficar y hallar la ecuación de la parábola dados los siguientes focos:

1) F (0,4)

Solución:

Se grafica el foco y a partir de ahí se selecciona la fórmula correspondiente a la parábola.



En este caso la parábola tiene vértice en el origen, el foco está ubicado sobre el eje Y, y la parábola abre hacia arriba.

$X^2 = 4ay$

$X^2 = 4\,(4)y$

$X^2 = 16y$

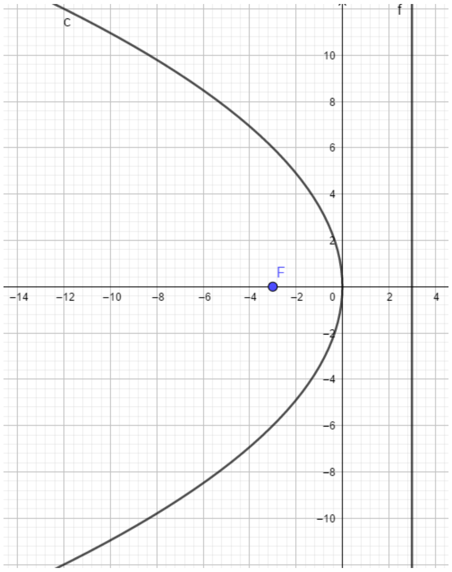
Ecuación:

$\mathbf{X^2 - 16y = 0}$

2) F (-3, 0)

Solución:

Se grafica el foco y a partir de ahí se selecciona la fórmula correspondiente a la parábola.



En este caso la parábola tiene vértice en el origen, el foco está ubicado sobre el semieje negativo de la X, y la parábola abre hacia la izquierda.

$Y^2 = -4ax$

$Y^2 = -4\,(3)x$

$Y^2 = -12x$

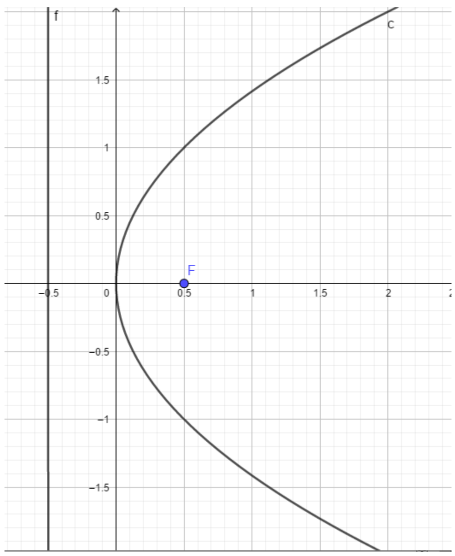
Ecuación:

$\mathbf{Y^2 + 12x = 0}$

3) F (1/2, 0)

Solución:

Se grafica el foco y a partir de ahí se selecciona la fórmula correspondiente a la parábola.



En este caso la parábola tiene vértice en el origen, el foco está ubicado sobre el semieje positivo de la X, y la parábola abre hacia la derecha.

$Y^2 = 4ax$

$Y^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)x$

$Y^2 = 2x$

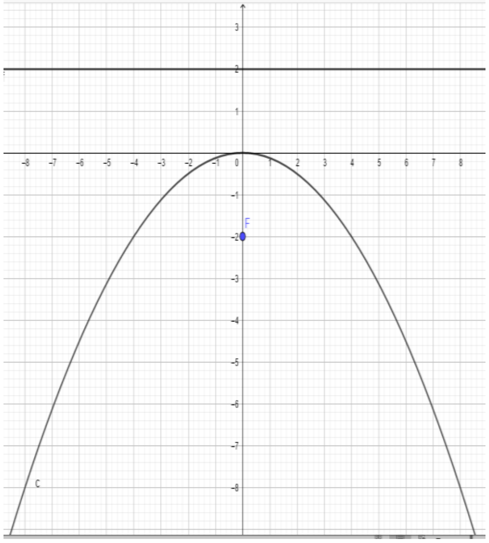
Ecuación:

$\mathbf{Y^2 - 2x = 0}$

4) F (0, -2)

Solución:

Se grafica el foco y a partir de ahí se selecciona la fórmula correspondiente a la parábola.



En este caso la parábola tiene vértice en el origen, el foco está ubicado sobre el semieje negativo de la Y, y la parábola abre hacia abajo.

$X^2 = -4ay$

$X^2 = -4(2)y$

$X^2 = -8y$

Ecuación:

$\mathbf{X^2 + 8y = 0}$

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN No.1

Graficar la parábola y hallar la ecuación:

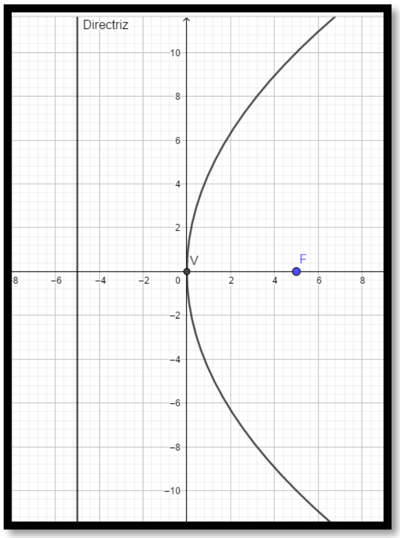
1) F= (4,0)
2) F= (0, -3)
3) F= (-1/2, 0)
4) F= (0, 5/3)
5) F= (1, 0)

HALLAR FOCO Y DIRECTRIZ DADA LA ECUACIÓN

Para hallar el foco y la directriz a partir de la ecuación, se procede de la siguiente manera:

Ejemplo 1: a partir de la ecuación, calcular el vértice, foco, directriz y graficar la parábola:

$Y^2 = 20\,x$



Solución:

A partir de la ecuación se adapta la fórmula empleada:

$Y^2 = 20\,x$

$$Y^2 = 4ax \;\rightarrow\; Y^2 = 20x \;\rightarrow 4a = 20 \;\rightarrow a = \frac{20}{4} \rightarrow a = 5$$

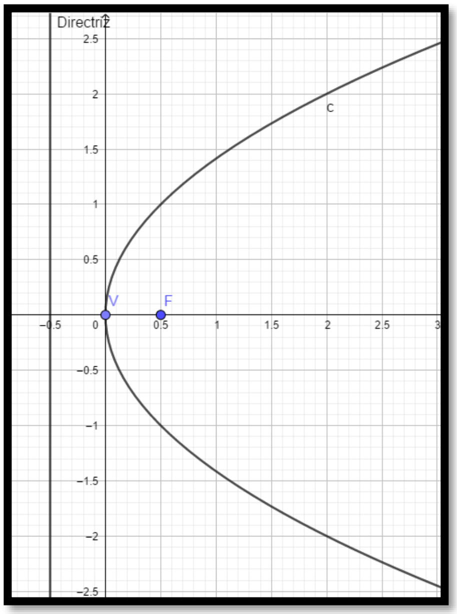
"a" es la distancia del origen al foco y del origen a la directriz.

Según la forma de la ecuación, el vértice está en el origen, el foco está sobre el eje x y hacia la derecha del vértice.

Cuando se grafica los elementos de la parábola, se puede establecer que el foco está ubicado en las coordenadas **(5,0)** y la directriz que está al lado contrario, tendrá por coordenadas **(-5,0)**.

Ejemplo 2: a partir de la ecuación, calcular el vértice, foco, directriz y graficar la parábola:

$Y^2 = 2x$



Solución:

A partir de la ecuación se adapta la fórmula empleada:

$Y^2 = 2x$

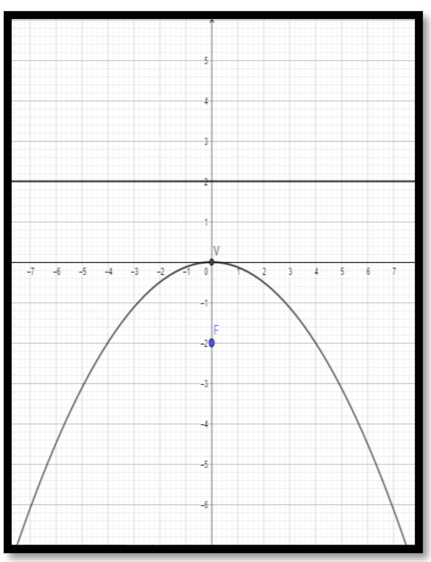
$$Y^2 = 4ax \;\rightarrow\; Y^2 = 2x \;\rightarrow 4a = 2 \;\rightarrow a = \frac{2}{4} \;\rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

"a" es la distancia del origen al foco y del origen a la directriz. Según la forma de la ecuación, el vértice está en el origen, el foco está sobre el eje x y hacia la derecha del vértice.

Cuando se grafica los elementos de la parábola, se puede establecer que el foco está ubicado en las coordenadas **(1/2,0)** y la directriz que está al lado contrario, tendrá por coordenadas **(-1/2,0)**.

Ejemplo 3: a partir de la ecuación, calcular el vértice, foco, directriz y graficar la parábola:

$X^2 = -8y$



Solución:

A partir de la ecuación se adapta la fórmula empleada:

$X^2 = -8y$

$$X^2 = -4ay \;\rightarrow\; X^2 = -8y \;\rightarrow -4a = -8 \;\rightarrow$$

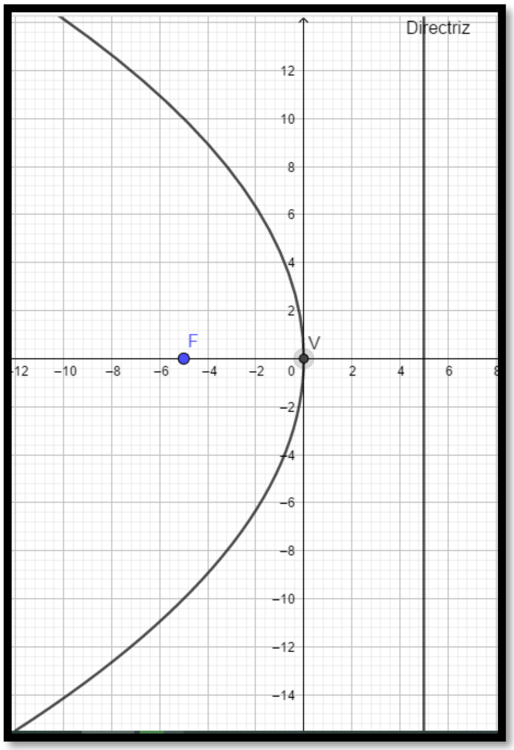
$$a = \frac{-8}{-4} \;\rightarrow \quad a = 2$$

"a" es la distancia del origen al foco y del origen a la directriz. Según la forma de la ecuación, el vértice está en el origen, el foco está sobre el semieje negativo de la "Y" y abre hacia abajo.

Cuando se grafica los elementos de la parábola, se puede establecer que el foco está ubicado en las coordenadas **(0,-2)** y es negativo porque la ecuación es negativa, la directriz que está al lado contrario, tendrá por coordenadas **(0,2)**.

Ejemplo 4: a partir de la ecuación, calcular el vértice, foco, directriz y graficar la parábola:

$Y^2 = -20x$



Solución:

A partir de la ecuación se adapta la fórmula empleada:

$Y^2 = -20x$

$$Y^2 = -4ax \rightarrow Y^2 = -20x \rightarrow -4a = -20 \rightarrow$$

$$a = \frac{-20}{-4} \rightarrow \quad a = 5$$

“a” es la distancia del origen al foco y del origen a la directriz.

Según la forma de la ecuación, el vértice está en el origen, el foco está sobre el semieje negativo de la “X” y abre hacia la izquierda.

Cuando se grafica los elementos de la parábola, se puede establecer que el foco está ubicado en las coordenadas **(-5,0)** y es negativo porque la ecuación es negativa, la directriz que está al lado contrario, tendrá por coordenadas **(5,0)**.

OBSERVACIÓN: cuando se va a realizar la gráfica, es necesario tener el lado recto, el cual se calcula como el valor absoluto de 4a. Para la gráfica este valor se divide por 2 y se distribuye en cada semieje.

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN No.2

Encontrar el foco, directriz y graficar las siguientes parábolas de acuerdo a la ecuación con vértice en el origen.

1) $Y^2 = 8x$
2) $X^2 = -y$
3) $Y^2 + 2x = 0$
4) $2y^2 = 8x$

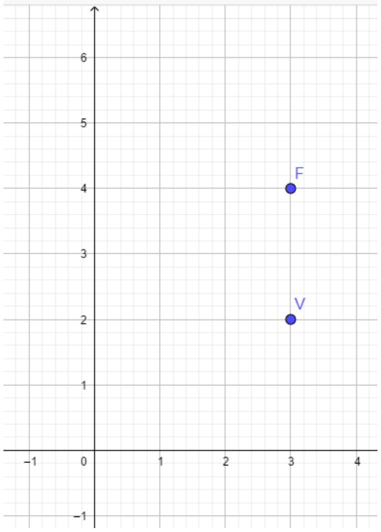
ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA CON VÉRTICE DIFERENTE AL ORIGEN

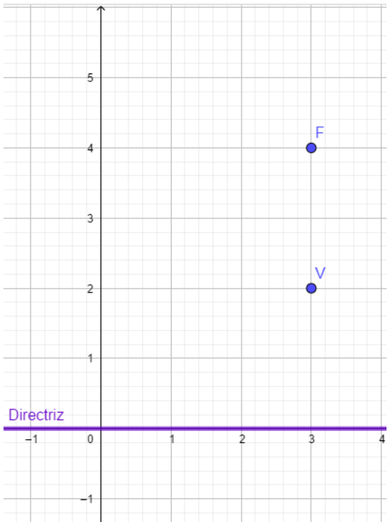
Para calcular la ecuación de la parábola cuando el vértice es diferente al origen, se procede de la siguiente manera:

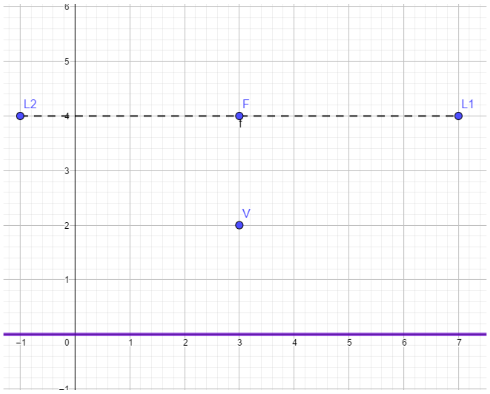
Ejemplo 1: construir una parábola con vértice (3,2) y foco (3,4). Hallar la ecuación estándar y general.

Solución:

En primer lugar, ubicamos en la gráfica los elementos que se conocen de acuerdo al ejercicio.



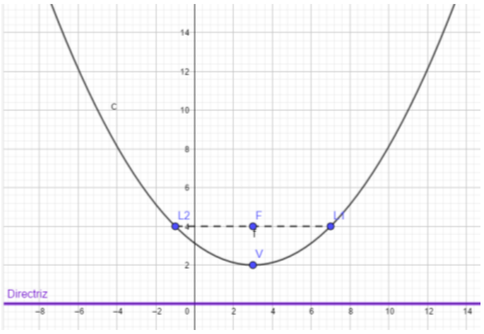




En la primera gráfica se puede observar que el foco (3,4) queda dos unidades arriba del vértice (3,2), por lo tanto, la directriz queda al lado contrario, 2 unidades abajo del vértice (gráfica 2).

Se calcula el lado recto, el cual es igual a |4a|= 4 (2) = 8. Esta medida se divide por 2 para poder distribuir bien la gráfica, denotaremos los puntos de ubicación como L1 y L2, posteriormente se unen estos puntos (línea punteada). (gráfica 3).

Se traza la gráfica de la parábola, uniendo los puntos del vértice y los puntos del lado recto.



Para calcular la ecuación, se emplea la siguiente fórmula:

$(x-h)^2 = 4a\,(y-k)$ fórmula estándar o canónica.

Se reemplazan los valores haciendo uso del vértice (3, 2), h= 3, k= 2, a= 2

$$(x-h)^2 = 4a\,(y-k)$$

$(x-3)^2 = 4(2)(y-2) \rightarrow \; \boldsymbol{(x-3)^2 = 8(y-2)}$ → Ecuación estándar

Para calcular la ecuación general se resuelve la ecuación estándar:

$$(x-3)^2 = 8(y-2) \rightarrow$$

$$(x)^2 - 2\,(x*3) + (3)^2 = 8y - 16 \rightarrow$$

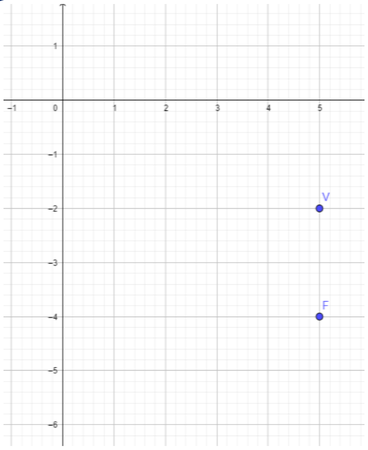
$$x^2 - 6x + 9 = 8y - 16 \rightarrow$$

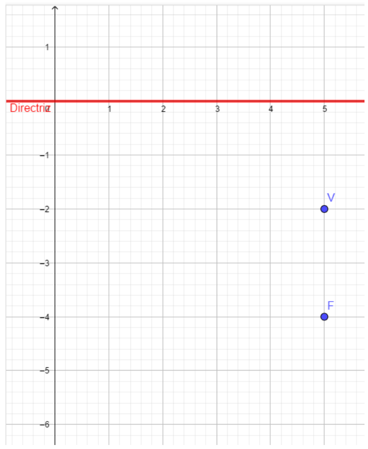
$x^2 - 6x + 9 - \; 8y + 16 = 0 \rightarrow \; \boldsymbol{x^2 - 6x - \; 8y + 25 = 0}$

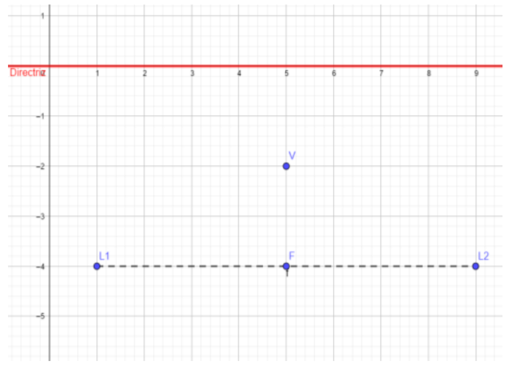
Ejemplo 2: encontrar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en (5,-2) y su foco en (5,-4)

Solución:

En primer lugar, ubicamos en la gráfica los elementos que se conocen de acuerdo al ejercicio.



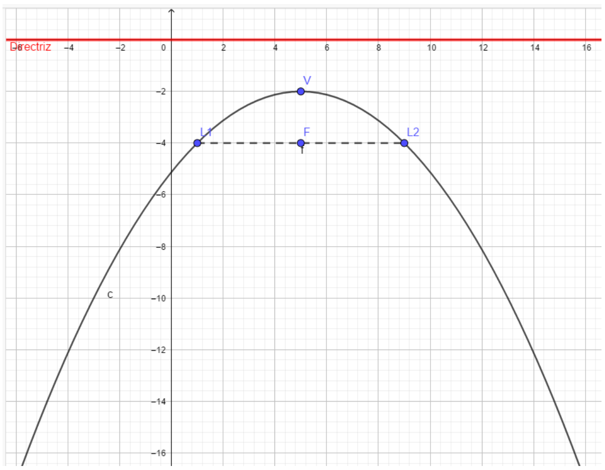




En la primera gráfica se puede observar que el foco (5,-4) queda dos unidades abajo del vértice (5,-2), por lo tanto, la directriz queda al lado contrario, 2 unidades arriba del vértice (gráfica 2).

Se calcula el lado recto, el cual es igual a |4a|= 4 (2) = 8. Esta medida se divide por 2 para poder distribuir bien la gráfica, denotaremos los puntos de ubicación como L1 y L2, posteriormente se unen estos puntos (línea punteada). (gráfica 3).

Se traza la gráfica de la parábola, uniendo los puntos del vértice y los puntos del lado recto.



Para calcular la ecuación, como la parábola abre hacia abajo, se emplea la siguiente fórmula:

$(x-h)^2 = -\,4a\,(y-k)$ fórmula estándar o canónica.

Se reemplazan los valores haciendo uso del vértice (5, -2), h= 5, k= - 2, a= 2

$$(x-h)^2 = -\,4a\,(y-k)$$

$(x-5)^2 = -4(2)\big(y-(-2)\big) \rightarrow$ $\boldsymbol{(x-5)^2 = -8(y+2)}$ $\rightarrow$ Ecuación estándar

Para calcular la ecuación general se resuelve la ecuación estándar:

$(x-5)^2 = -8(y+2) \rightarrow$

$(x)^2 - 2\,(x * 5) + (5)^2 = -8y - 16 \rightarrow$

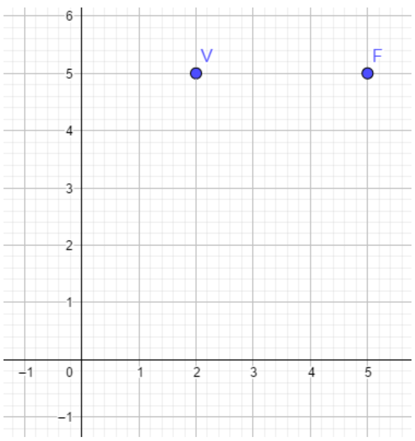
$x^2 - 10x + 25 = -8y - 16 \rightarrow$

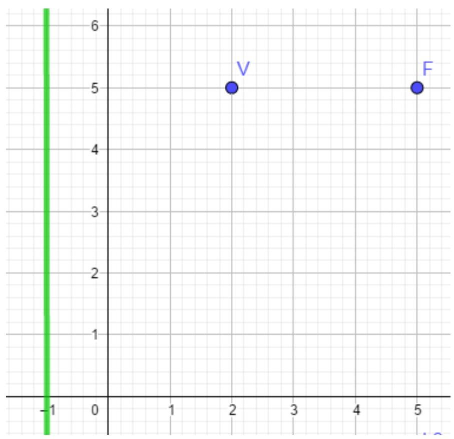
$x^2 - 10x + 25 + \; 8y + 16 = 0 \rightarrow$ $\boldsymbol{x^2 - 10x + \; 8y + 41 = 0}$

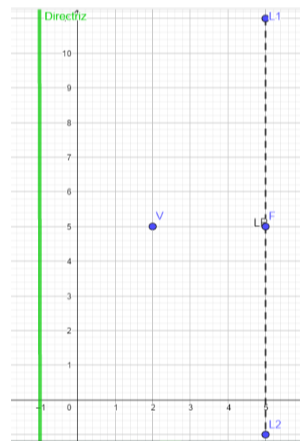
Ejemplo 3: encontrar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en (2,5) y su foco en (5,5)

Solución:

En primer lugar, ubicamos en la gráfica los elementos que se conocen de acuerdo al ejercicio.



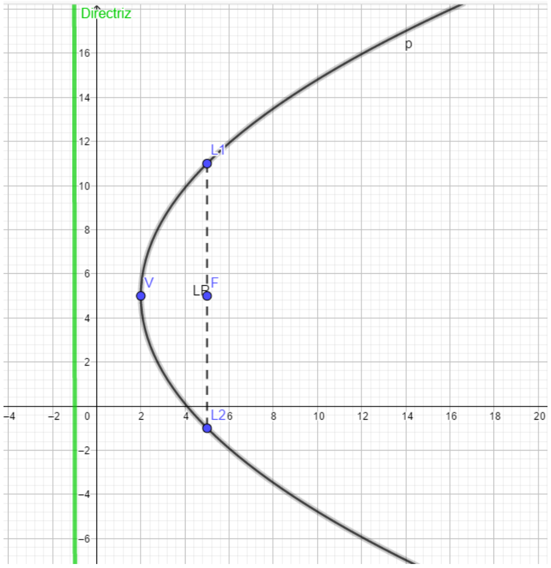




En la primera gráfica se puede observar que el foco (5,5) queda tres unidades a la derecha del vértice (2,5), por lo tanto, se trata de una parábola horizontal. La directriz queda al lado contrario, 3 unidades a la izquierda del vértice (gráfica 2).

Se calcula el lado recto, el cual es igual a |4a|= 4 (3) = 12. Esta medida se divide por 2 para poder distribuir bien la gráfica, denotaremos los puntos de ubicación como L1 y L2, posteriormente se unen estos puntos (línea punteada). (gráfica 3).

Se traza la gráfica de la parábola, uniendo los puntos del vértice y los puntos del lado recto.



Para calcular la ecuación, como la parábola es horizontal y abre hacia la derecha, se emplea la siguiente fórmula:

$(y-k)^2 = 4a\,(x-h)$ fórmula estándar o canónica.

Se reemplazan los valores haciendo uso del vértice (2, 5), h= 2, k= 5, a= 3

$(y-k)^2 = 4a\,(x-h)$

$(y-5)^2 = 4(3)(x-2) \rightarrow$ $\mathbf{(y-5)^2 = 12(x-2)}$ → Ecuación estándar

Para calcular la ecuación general se resuelve la ecuación estándar:

$(y-5)^2 = 12(x-2) \rightarrow$

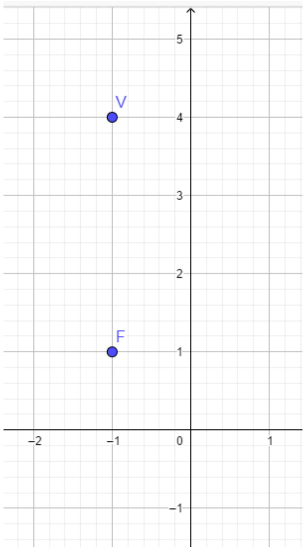
$(y)^2 - 2\,(y * 5) + (5)^2 = 12x - 24 \rightarrow$ $y^2 - 10y + 25 = 12x - 24 \rightarrow$

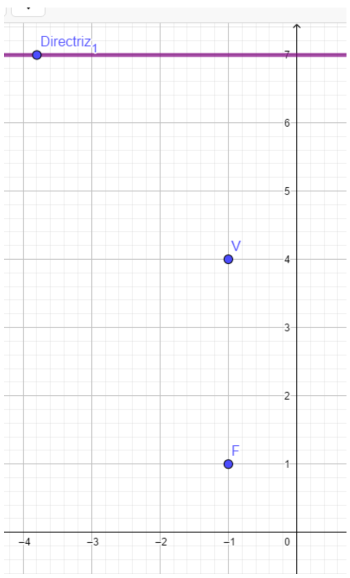
$y^2 - 10y + 25 - 12x + 24 = 0 \rightarrow$ $\mathbf{y^2 - 12x - 10y + 49 = 0}$

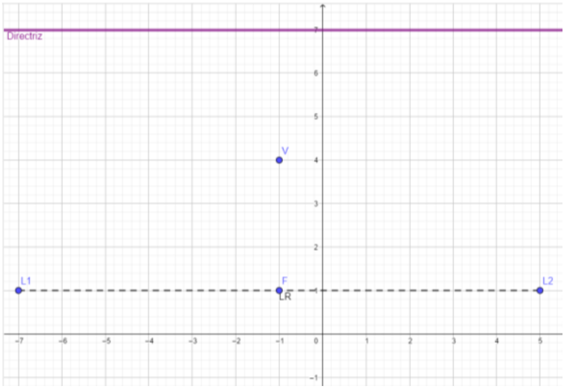
Ejemplo 4: encontrar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en (-1,4) y su foco en (-1,1)

Solución:

En primer lugar, ubicamos en la gráfica los elementos que se conocen de acuerdo al ejercicio.



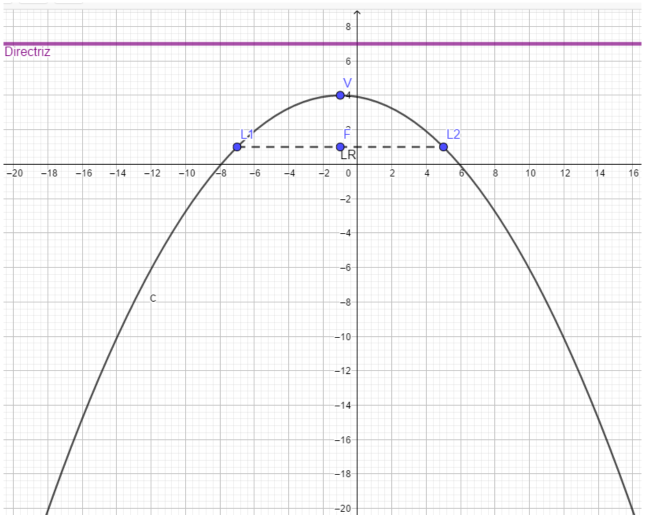




En la primera gráfica se puede observar que el foco (-1,1) queda tres unidades abajo del vértice (-1,4), por lo tanto, se trata de una parábola vertical. La directriz queda al lado contrario, 3 unidades arriba del vértice (gráfica 2).

Se calcula el lado recto, el cual es igual a |4a|= 4 (3) = 12. Esta medida se divide por 2 para poder distribuir bien la gráfica, denotaremos los puntos de ubicación como L1 y L2, posteriormente se unen estos puntos (línea punteada). (gráfica 3).

Se traza la gráfica de la parábola, uniendo los puntos del vértice y los puntos del lado recto.



Para calcular la ecuación, como la parábola es vertical y abre hacia la abajo, se emplea la siguiente fórmula:

$(x-h)^2 = -4a\,(y-k)$ fórmula estándar o canónica.

Se reemplazan los valores haciendo uso del vértice (-1, 4), h= -1, k= 4, a= 3

$(x-h)^2 = -4a\,(y-k)$

$\left(x-(-1)\right)^2 = -4(3)(y-4) \rightarrow$ $\boldsymbol{(x+1)^2 = -12(y-4)}$ $\rightarrow$ Ecuación estándar

Para calcular la ecuación general se resuelve la ecuación estándar:

$(x+1)^2 = -12(y-4) \rightarrow$

$(x)^2 + 2\,(x*1) + (1)^2 = -12y + 48 \rightarrow$ $x^2 + 2x + 1 = -12y + 48 \rightarrow$

$x^2 + 2x + 1 + 12y - 48 = 0 \rightarrow$ $\boldsymbol{x^2 + 2x + 12y - 47 = 0}$

HALLAR VÉRTICE Y FOCO CONOCIDA LA ECUACIÓN

Ejemplo 1: hallar vértice y foco de una parábola que tiene como ecuación general $x^2 - 6x - 8y - 7 = 0$

Solución:

En primer lugar, distribuimos los términos con “X” a un lado y los términos con “Y” a otro lado y planteamos una igualdad. Al hacer el traspaso de los términos de “Y” los signos cambian.

$x^2 - 6x = 8y + 7$

Adicionamos términos para completar al lado izquierdo el trinomio cuadrado perfecto, para esto se divide el término que acompaña a la “X” por 2 y se suman sus cuadrados a ambos lados.

$x^2 - 6x + (3)^2 = 8y + 7 + (3)^2$

$x^2 - 6x + 9 = 8y + 7 + 9$

Se resuelve el trinomio al lado izquierdo y se hace la reducción de términos al lado derecho.

$(x-3)^2 = 8y + 16$

Se factoriza el lado derecho (factor común)

$$(x-3)^2 = 8(y+2)$$

De acuerdo a la estructura del resultado anterior, se selecciona la fórmula que mejor se ajusta a esta ecuación ordinaria de la parábola.

$$(x-3)^2 = 8(y+2)$$

$$\boldsymbol{(x-h)^2 = 4a(y-k)}$$

En este caso, se ajusta a una parábola vertical que abre hacia arriba.

A partir de la estructura anterior, se puede establecer los diferentes términos de la parábola.

Vértice:

$$\boldsymbol{(x-h)^2 = 4a(y-k)}$$

h= 3, k= - 2, V=(h, k), V= (3,-2)

Distancia del vértice al foco y a la directriz:

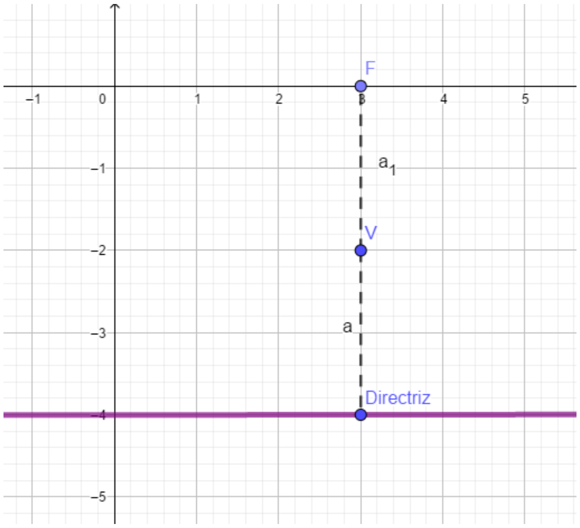
$$4a = 8 \rightarrow a = \frac{8}{4} \rightarrow a = 2$$

Foco:

Para calcular el foco se tiene en cuenta el vértice, que la parábola abre hacia arriba y que la distancia del vértice al foco es 2, por lo tanto, se ubica el vértice y se mide 2 unidades hacia arriba para llegar al foco.

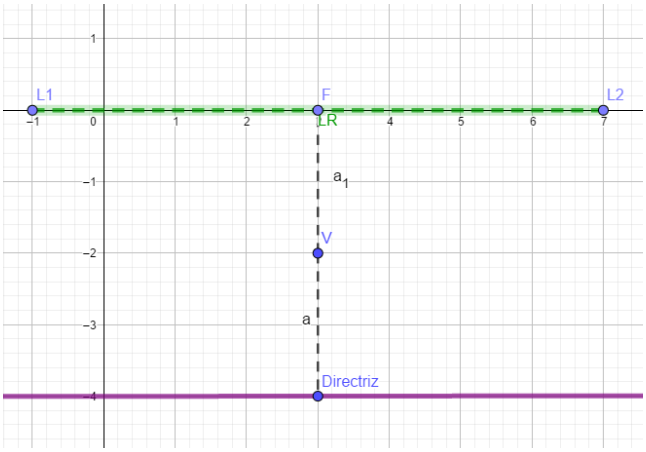
Directriz:

La directriz queda al lado contrario del vértice y tiene la misma medida del vértice al foco.

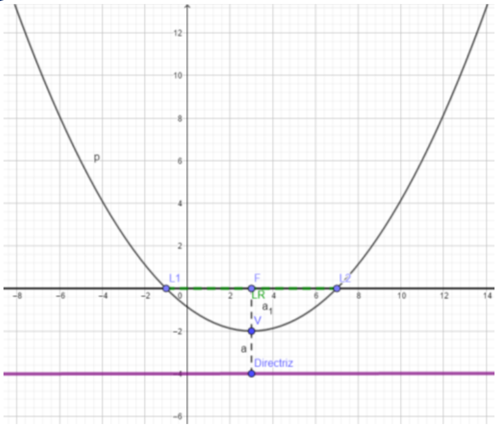


Lado recto:

$LR = |4a| \rightarrow LR = 4(2) \rightarrow LR = 8$. Para graficar el lado recto, se divide la medida entre dos y se ubican los puntos a ambos lados del foco.



Finalmente, se unen los puntos del vértice y del lado recto y de esta manera se grafica la parábola.



Ejemplo 2: hallar vértice y foco de una parábola que tiene como ecuación general $2x^2 + 8x - y + 8 = 0$

Solución:

En primer lugar, buscamos que X² quede con coeficiente 1, para esto se dividen todos los términos de la ecuación por 2 (que en este caso es el coeficiente o número que acompaña a X²)

$$2x^2 + 8x - y + 8 = 0 \rightarrow \frac{2x^2}{2} + \frac{8x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{8}{2} = \frac{0}{2} \rightarrow x^2 + 4x - \frac{y}{2} + 4 = 0$$

Distribuimos los términos con "X" a un lado y los términos con "Y" a otro lado y planteamos una igualdad. Al hacer el traspaso de los términos de "Y" los signos cambian.

$$x^2 + 4x = \frac{y}{2} - 4$$

Adicionamos términos para completar al lado izquierdo el trinomio cuadrado perfecto, para esto se divide el término que acompaña a la "X" por 2 y se suman sus cuadrados a ambos lados.

$$x^2 + 4x + (2)^2 = \frac{y}{2} - 4 + (2)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = \frac{y}{2} - 4 + 4$$

Se resuelve el trinomio al lado izquierdo y se hace la reducción de términos al lado derecho, en este caso, se cancelan los números 4.

$$(x+2)^2 = \frac{y}{2}$$

De acuerdo a la estructura del resultado anterior, se selecciona la fórmula que mejor se ajusta a esta ecuación ordinaria de la parábola.

$$(x+2)^2 = \frac{1}{2}y$$

$$\boldsymbol{(x-h)^2 = 4a(y-k)}$$

En este caso, se ajusta a una parábola vertical que abre hacia arriba.

A partir de la estructura anterior, se puede establecer los diferentes términos de la parábola.

Vértice:

$$\boldsymbol{(x-h)^2 = 4a(y-k)}$$

h= -2, k= 0, V=(h, k), V= (-2, 0)

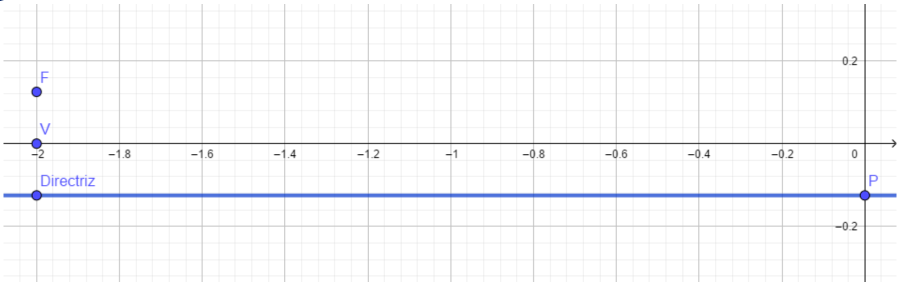
Distancia del vértice al foco y a la directriz:

$$4a = \frac{1}{2} \rightarrow 8a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{8}$$

Foco: Para calcular el foco se tiene en cuenta el vértice, que la parábola abre hacia arriba y que la distancia del vértice al foco es $\frac{1}{8}$, por lo tanto, se ubica el vértice y se mide $\frac{1}{8}$ unidades hacia arriba para llegar al foco.

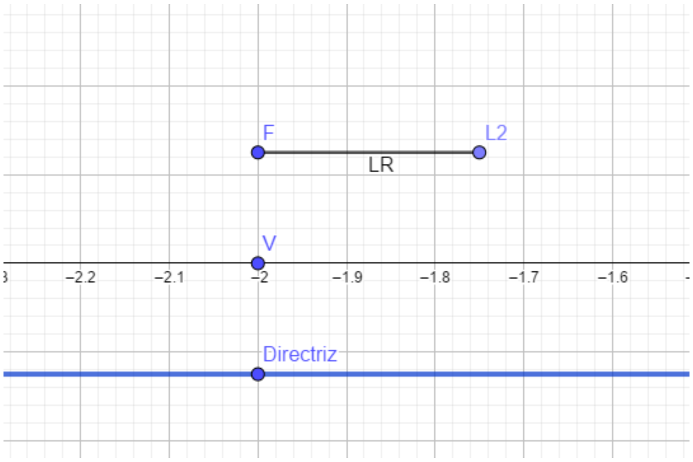
Directriz:

La directriz queda al lado contrario del vértice y tiene la misma medida del vértice al foco.

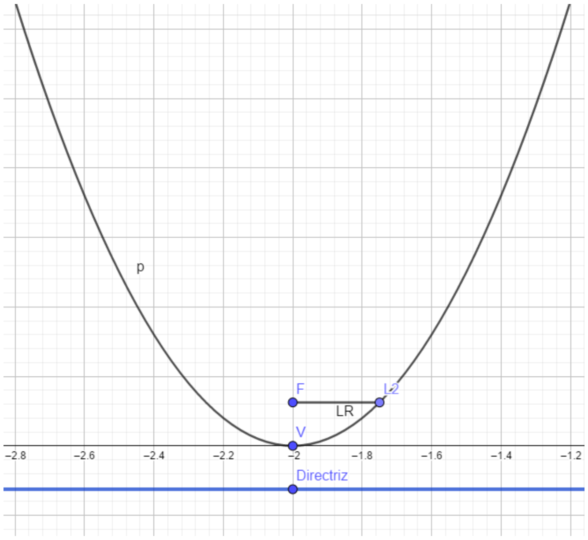


Lado recto:

$LR = |4a| \rightarrow LR = 4\left(\frac{1}{8}\right) \rightarrow LR = \frac{1}{2}$. Para graficar el lado recto, se divide la medida entre dos y se ubican los puntos a ambos lados del foco.



Finalmente, se unen los puntos del vértice y del lado recto y de esta manera se grafica la parábola.



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN No.3

1. Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y con foco en (0,2)
2. Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y con foco en (4,0)
3. Encontrar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el punto (3,2) y el foco en (5,2)
4. Encontrar los elementos de la parábola cuya ecuación es $y^2 - 10y - 12x + 61 = 0$

LA ELIPSE

Definición: se llama elipse al lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante.

La línea que une los dos focos se llama eje principal de la elipse y la mediatriz de los mismos (eje secundario).

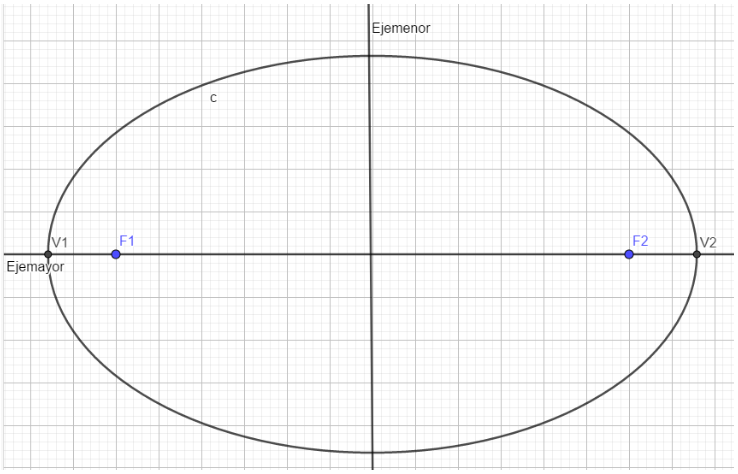
El punto medio de los dos focos se llama centro de la elipse y la distancia entre ellos se llama distancia focal, que es igual a **2c**.

Pueden distinguirse entonces en una elipse dos ejes, el eje principal se representa por **2a** y el eje secundario por **2b.**

El semieje mayor se identifica con la letra “a”.

El semieje menor se identifica con la letra “b”.

El lado recto son las cuerdas que pasan por los focos perpendiculares al eje mayor.



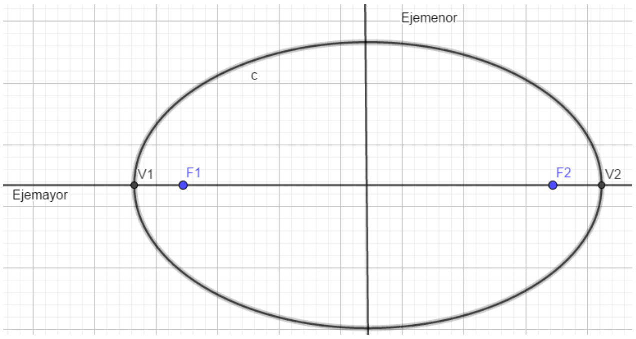
El valor e= $\frac{c}{a}$, que está comprendido entre 0 y 1, se llama excentricidad.

El parámetro de la excentricidad indica que tan “achatada” está la elipse, a medida que se aproxima a cero la excentricidad, la elipse se asemeja a la circunferencia y cuando es cercana a 1, es muy angosta y alargada.

ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN (0,0)

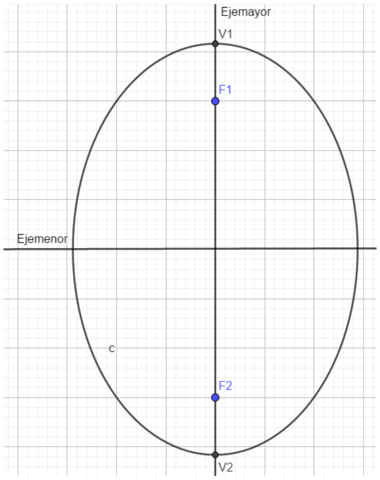
a) Cuando el semieje mayor “a” se encuentra sobre “x”

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



b) Cuando el semieje mayor se encuentra sobre y

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Nota: siempre se cumple que:

$a^2 > b^2 > 0$ $\qquad$ $c^2 = a^2 - b^2$

EJEMPLOS

1. Determinar la posición de la elipse, la ubicación de sus focos y su excentricidad sabiendo que su ecuación es:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

Solución:

El término mayor del denominador está en "x" por lo tanto la elipse debe ser aquella cuyo eje mayor está en la dirección horizontal.

Se sabe que $a^2 > b^2$, por tanto:

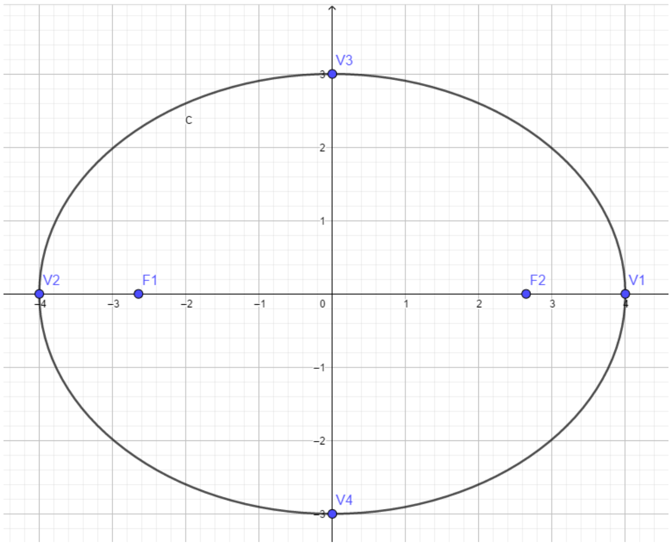
$a^2 = 16 \rightarrow a= \sqrt{16} \rightarrow a= 4$ $b^2= 9 \rightarrow b= \sqrt{9} \rightarrow b= 3$

$c= \sqrt{(4)^2-(3)^2} \rightarrow c = \sqrt{16-9} \rightarrow c = \sqrt{7}$

Excentricidad: $e= \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0{,}66$

Focos: están sobre "X": F1($-\sqrt{7}, 0$) y F2($\sqrt{7}, 0$)

Para calcular los vértices se hace uso de los valores de "a" y de "b", como es una elipse horizontal los vértices en este eje quedan ubicados en (4,0) y (-4,0) y en el eje "Y" se ubican los vértices en (0,3) y (0,-3).



2. Obtener el valor de los ejes, vértices y gráfica de la ecuación:

$4x^2 + 9y^2 = 36$

Solución:

- La ecuación debe ser igual a 1, por lo tanto, se divide todo por 36, y se hallan los valores de a y b.

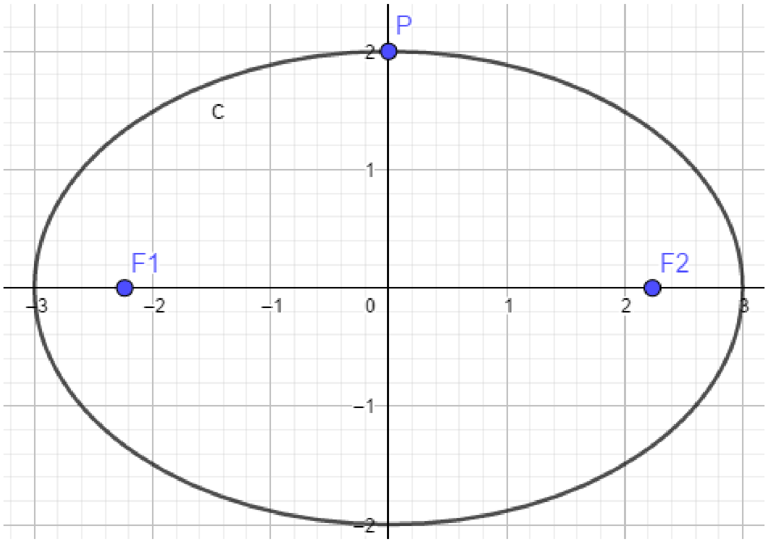
$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36} \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \rightarrow$$

$$a^2 = 9 \rightarrow a = \sqrt{9} \rightarrow a = 3 ; b^2 = 4 \rightarrow b = \sqrt{4} \rightarrow b = 2$$

- Se calcula el valor de c:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow c = \sqrt{(3)^2 - (2)^2} \rightarrow c = \sqrt{9 - 4} \rightarrow c = \sqrt{5}$$

Como el término mayor está en el eje x, los focos también estarán ubicados en este eje y serán iguales a F1 ($-\sqrt{5}, 0$) y F2 ($\sqrt{5}, 0$)



Eje mayor 2(a)= 2(3) = 6

Eje menor 2(b)= 2(2) = 4

V1(-3,0), V2(0,2), V3(3,0), V4(0,-2)

ECUACIÓN DE LA ELIPSE DADOS FOCOS Y EXCENTRICIDAD

Obtener la ecuación de la elipse con focos (3,0) y (-3,0) y excentricidad de $\frac{3}{4}$

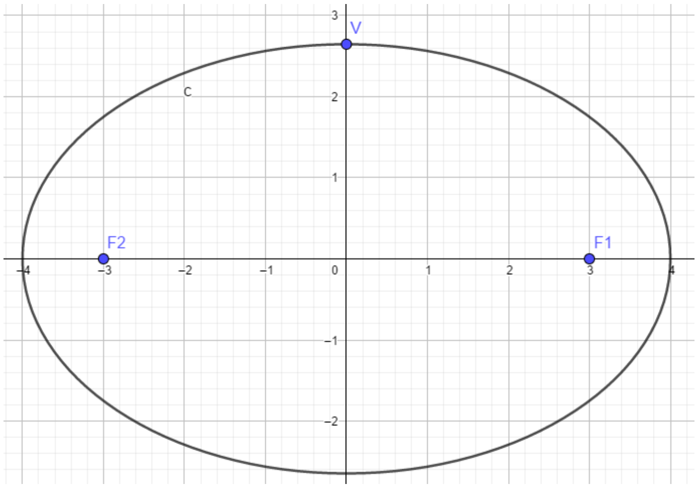
Solución:

- La excentricidad se obtiene: $e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{3}{4} \rightarrow c = 3, a = 4$
- Con los valores de c y de a, se calcula b:

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow a^2 = c^2 + b^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow$$
$$b^2 = (4)^2 - (3)^2 \rightarrow b^2 = 16 - 9 \rightarrow b^2 = 7 \rightarrow b = \sqrt{7}$$

Ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{(4)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$



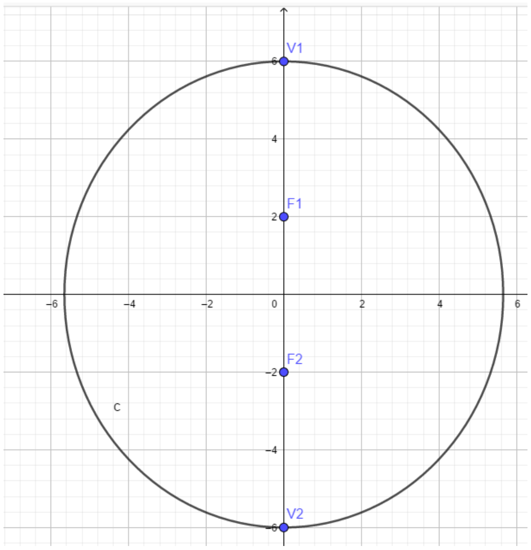
C=(0,0), V1 (-4,0), V2 (0, $\sqrt{7}$), V3(4,0), V4(0, -$\sqrt{7}$)

ECUACIÓN DE LA ELIPSE CONOCIDOS DOS VÉRTICES Y SUS FOCOS

Hallar la ecuación de la elipse dados los vértices V1(0,6) y V2 (0,-6) y los focos F1 (0,2) y F2 (0, -2)

Solución:

- Se ubican los puntos en el plano cartesiano y se grafica la elipse.



- El centro es (0,0), los valores mayores se encuentran sobre el eje "Y", por lo tanto, se puede determinar que la elipse es vertical.

- "a" está ubicada sobre el eje "Y" y es igual a la distancia del centro al vértice, en este caso es igual a 6.

- "c" es la semidistancia focal, en este caso es 2.

- Se procede a calcular "b":

$$b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b^2 = (6)^2 - (2)^2 \rightarrow b^2 = 36 - 4 \rightarrow b^2 = 32 \rightarrow b = \sqrt{32} \rightarrow b = 4\sqrt{2}$$

- Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{32})^2} + \frac{y^2}{(6)^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{36} = 1$$

- Para calcular la ecuación se inicia realizando la suma de las fracciones, haciendo uso de M.C.M de los denominadores (en este caso el M.C.M es igual a 288).

$$\frac{9(x^2)+8(y^2)}{288}=1$$

- Se aplica proporcionalidad y se resuelve.

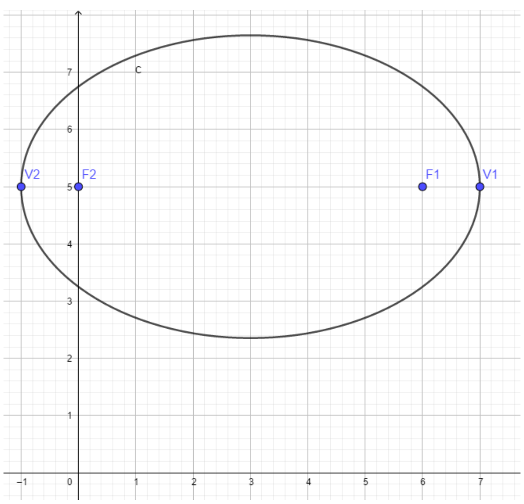
$$9x^2+8y^2=288 \rightarrow 9x^2+8y^2-288=0$$

ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON CENTRO DIFERENTE AL ORIGEN

Encontrar la ecuación de la elipse cuyos vértices son V1 (7,5), V2 (-1,5), focos F1 (6,5) y F2 (0,5).

Solución:

- Se ubican los puntos en el plano cartesiano y se grafica la elipse.



- Para calcular el centro se halla el punto medio de los focos:

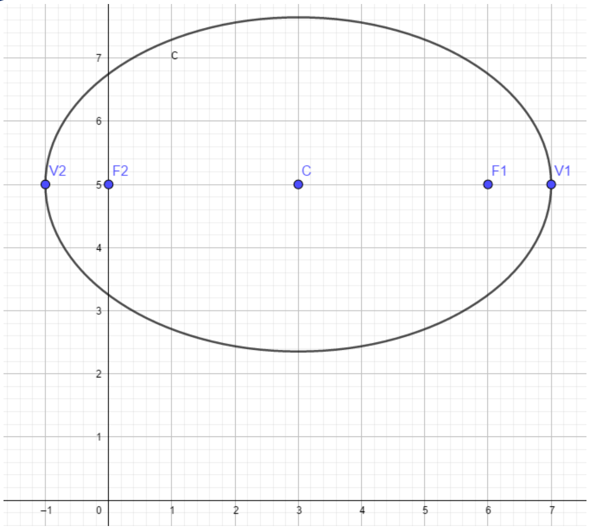
F1= (6,5) y F2 (0,5)

x, y x, y

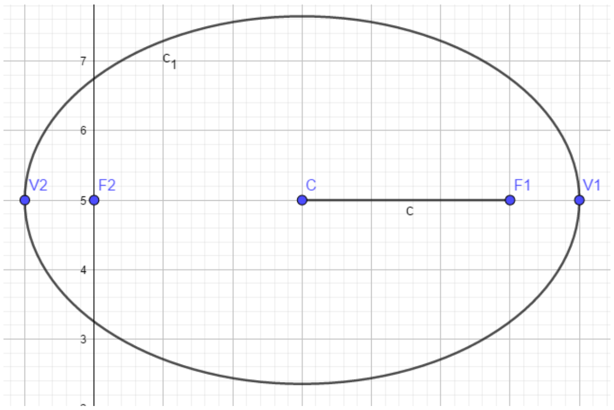
Xm= $\frac{6+0}{2} \rightarrow \mathrm{Xm}=\frac{6}{2} \rightarrow \mathrm{Xm}=3$

Ym= $\frac{5+5}{2} \rightarrow \mathrm{Ym}=\frac{10}{2} \rightarrow \mathrm{Xm}=5$

Centro= (3,5)



C= distancia del centro de la elipse al foco (en este caso es igual a 3)



a= es la distancia del centro al vértice (en este caso es igual a 4).

- Con los valores de a y c se calcula el valor de b:

$$\mathrm{b}^2=\mathrm{a}^2-\mathrm{c}^2 \rightarrow \mathrm{b}^2=(4)^2-(3)^2 \rightarrow \mathrm{b}^2=16-9 \rightarrow \mathrm{b}^2=7 \rightarrow \mathrm{b}=\sqrt{7}$$

- Con la información anterior se reemplaza en la fórmula:

$$\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2}{\mathrm{a}^2}+\frac{(\mathrm{y}-\mathrm{k})^2}{\mathrm{b}^2}=1$$

Calculando la ecuación ordinaria se obtiene: Centro= (3,5)
h, k

$$\frac{(x-3)^2}{(4)^2}+\frac{(y-5)^2}{(\sqrt{7})^2}=1 \rightarrow \frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{7}=1$$

- Para calcular la ecuación se inicia realizando la suma de las fracciones, haciendo uso de M.C.M de los denominadores (en este caso el M.C.M es igual a 112).

$$\frac{7(x-3)^2+16(y-5)^2}{112}=1$$

- Se resuelven los productos notables

$$\frac{7[(x)^2-2(x.3)+(3)^2]+16[(y)^2-2(y.5)+(5)^2}{112}=1 \rightarrow$$

$$\frac{7[x^2-6x+9]+16[y^2-10y+25]}{112}=1$$

- Se resuelven las multiplicaciones:

$$\frac{7x^2-42x+63+16y^2-160y+400}{112}=1$$

- Se aplica proporcionalidad y se reducen términos semejantes:

$$7x^2+16y^2-42x-160y+463=112 \;\rightarrow\; 7x^2+16y^2-42x-160y=112-463$$

$$7x^2+16y^2-42x-160y=-351 \text{ ó } 7x^2+16y^2-42x-160y+351=0$$

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

1. Obtener la ecuación de la elipse cuyos focos son F1 (-5,0) y F2 (5,0) y la magnitud del eje mayor es 12. Graficar.

2. Dada la siguiente ecuación, hallar focos, vértices, excentricidad, ecuación general y graficar:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$$

3. La excentricidad de una elipse con centro en el origen es $e=\frac{5}{8}$ y su eje focal coinciden con el eje “X”. Obtener la ecuación y realizar la gráfica.

4. Una elipse con centro en el origen tiene un vértice A(0,6) y la longitud de su eje menor es 10. Obtener la ecuación y realizar la gráfica.

5. Obtener la ecuación de la elipse cuyos focos son F1(2,4) y F2(2,-4), uno de sus vértices es (2,6). Hallar la ecuación y realizar la gráfica.

"Yo no estudio para saber más, sino para ignorar menos". Sor Juana Inés de la Cruz.