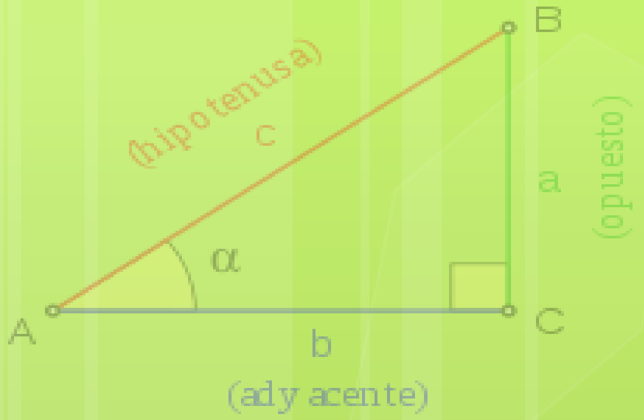
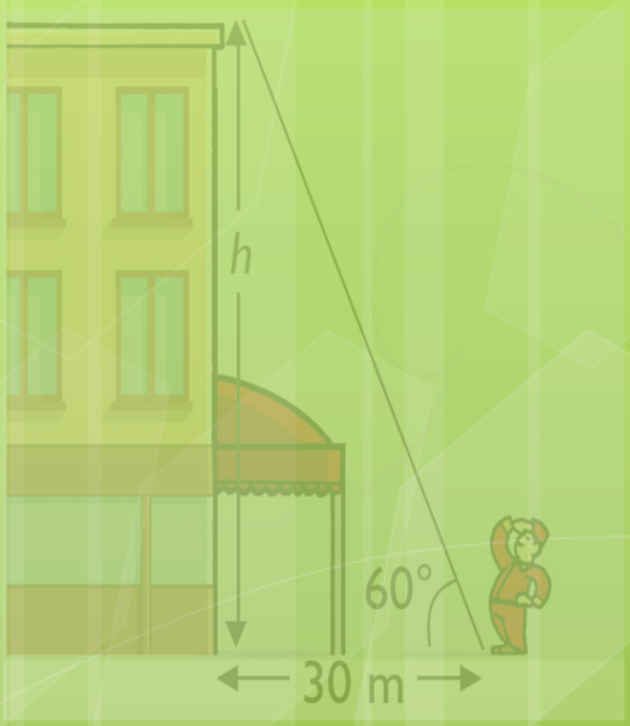
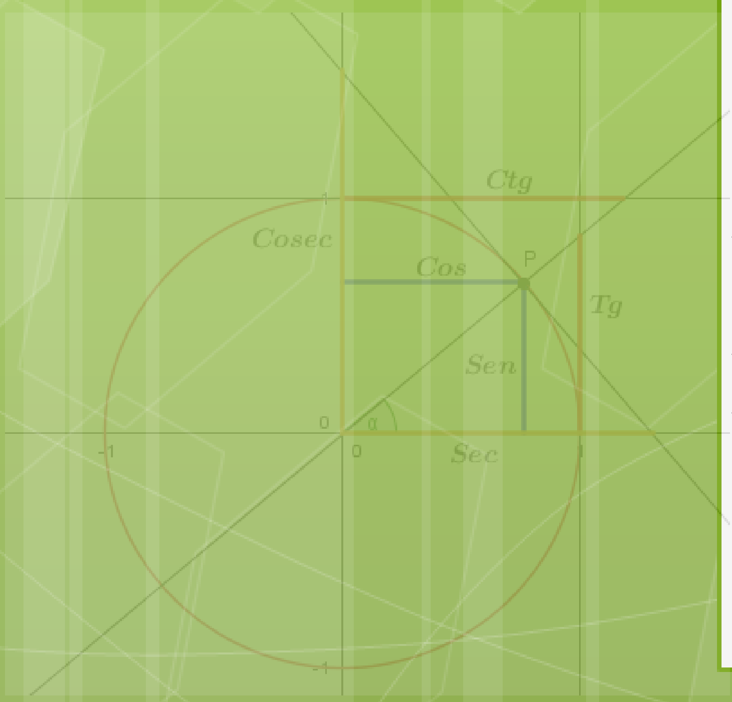






TRIGONOMETRÍA BÁSICA

Diseñado por:
Esp. María Cristina Marín Valdés

Área de Matemáticas
I.E. Eduardo Fernández Botero
Amalfi (Ant)
Actualizado 2023

Contenido

CONTENIDO

Contenido

INTRODUCCIÓN

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es 'la medición de los triángulos'. Es la parte de la matemática que establece la relación entre los ángulos y los lados de un triángulo, siendo fundamental esta relación para la resolución de problemas relacionados al cálculo de las magnitudes y medidas de lados y ángulos de triángulos semejantes y también de polígonos, ya que todos los polígonos se pueden dividir en un número determinado de triángulos, por ser el triángulo polígono de menor número de lados.

Las relaciones establecidas entre estos elementos del triángulo determinan las 6 razones trigonométricas que básicamente se obtienen de un triángulo rectángulo, sin que esto signifique que no pueda aplicarse a cualquier tipo de triángulo o polígono.

En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Posee numerosas aplicaciones, entre las que se encuentran: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas global de navegación por satélites. (www.es.wikipedia.org)

la trigonometría es de mucha utilidad en la ingeniería civil, para el cálculo preciso de distancias, ángulos de inclinación o de peralte en una carretera y en arquitectura permite calcular las distancias y las fuerzas relacionadas con elementos de la diagonal

Apreciado estudiante este módulo es un compendio de conceptos básicos como son: los sistemas de medición de ángulos, el concepto de triángulo rectángulo y la aplicación de diferentes teoremas para su solución, las razones trigonométricas, los triángulos oblicuángulos, las identidades trigonométricas y ecuaciones trigonométricas. Cada uno de ellos con sus diferentes componentes que permite adquirir una noción amplia del concepto.

La metodología empleada es una conceptualización narrativa explicativa, que posibilita al estudiante una clara comprensión de los conceptos estudiados, además de permitirle dosificar su nivel de apropiación y un avance gradual de acuerdo a su ritmo de aprendizaje, favoreciendo el trabajo en equipo y la autonomía. Posee más de 200 ejercicios entre ejemplos y actividades de profundización que favorecen la realimentación continua de cada una de las temáticas.

ESQUEMA DE UNIDAD

TRIGONOMETRÍA

TEMÁTICAS BÁSICAS

- Sistemas de medición de ángulos.
- Operaciones con ángulos.
- Triángulos especiales.
- Razones trigonométricas en triángulos rectángulos.
- Resolución de situaciones problema haciendo uso de razones trigonométricas.
- Razones trigonométricas en triángulos rectángulos con ángulos notables.

LOGROS

APLICA LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA SOLUCIÓN DE SITUACIONES QUE REQUIERAN EL USO DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS Y OBLICUÁNGULOS.

INDICADORES DE LOGRO

* Establece correspondencia entre diferentes sistemas de medición de ángulos, haciendo conversiones entre ellos.
* Realiza operaciones con ángulos en los diferentes sistemas de medición.
* Halla el valor de los lados en un triángulo rectángulo con ángulos notables.
* Encuentra el valor de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo y las aplica en la resolución de triángulos rectángulos.
Emplea las funciones trigonométricas en la solución de situaciones problema con triángulos rectángulos.
* Calcula las razones trigonométricas en triángulos rectángulos con ángulos notables.

GENERALIDADES

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es 'la medición de los triángulos".

En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno; tangente, cotangente; secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Posee numerosas aplicaciones, entre las que se encuentran: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas global de navegación por satélites. (www.es.wikipedia.org)

HISTORIA

Los antiguos egipcios y los babilonios conocían ya los teoremas sobre las proporciones de los lados de los triángulos semejantes. Pero las sociedades prehelénicas carecían de la noción de una medida del ángulo y por lo tanto, los lados de los triángulos se estudiaron en su medida, un campo que se podría llamar trilaterometría.

Los astrónomos babilonios llevaron registros detallados sobre la salida y puesta de las estrellas, el movimiento de los planetas y los eclipses solares y lunares, todo lo cual requiere la familiaridad con la distancia angular medida sobre la esfera celeste. Sobre la base de la interpretación de una tablilla cuneiforme Plimpton 322 (c. 1900 a. C.), algunos incluso han afirmado que los antiguos babilonios tenían una tabla de secantes. Hoy, sin embargo, hay un gran debate acerca de si se trata de una tabla de ternas pitagóricas, una tabla de soluciones de ecuaciones de segundo grado, o una tabla trigonométrica.

Los egipcios, en el segundo milenio antes de Cristo, utilizaban una forma primitiva de la trigonometría, para la construcción de las pirámides. El Papiro de Ahmes, escrito por el escriba egipcio Ahmes (c. 1680-1620 a. C.), contiene el siguiente problema relacionado con la trigonometría:
Si una pirámide es de 250 codos de alto y el lado de su base es de 360 codos de largo, ¿cuál es su Seked?
La solución al problema es la relación entre la mitad del lado de la base de la pirámide y su altura. En otras palabras, la medida que se encuentra para la seked es la cotangente del ángulo que forman la base de la pirámide y su respectiva cara.

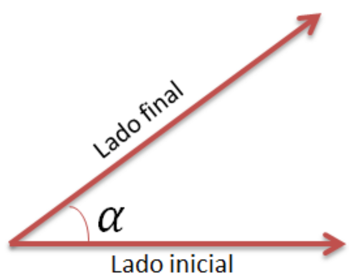
Tablilla babilonia Plimpton 322.

Papiro de Ahmes

SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

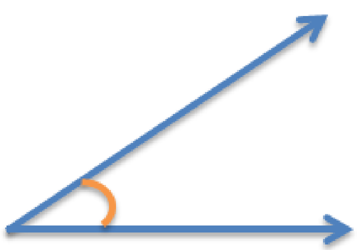
Ángulos, medida y clasificación

Ángulo: un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se les llama lados y al origen común se le denomina vértice.

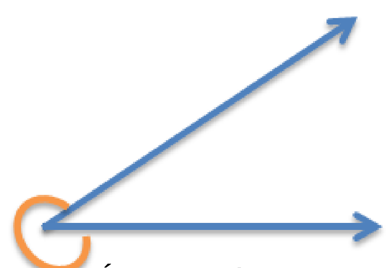


Lo que caracteriza un ángulo es la apertura de sus lados. Si los lados de un ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ están más abiertos que los de otro ángulo $\boldsymbol{\beta}$ se dice que: $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$

Dos semirrectas con origen común determinan dos ángulos distintos; el menor de ellos se llama ángulo convexo y el mayor, ángulo cóncavo.



Ángulo Convexo

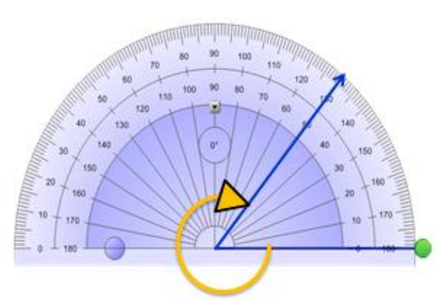


Ángulo Cóncavo

Medición de ángulos:

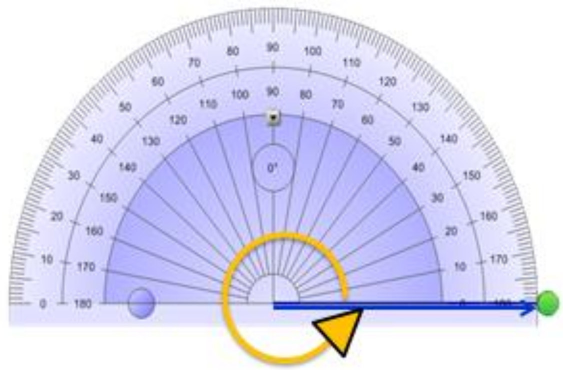
Para medir un ángulo se debe tener en cuenta si la rotación del lado terminal es en sentido contrario al de las agujas del reloj, en este caso se dirá que el ángulo es positivo, en caso contrario la medida será negativa.

ÁNGULO POSITIVO



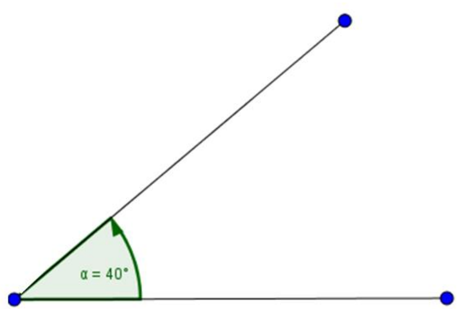
ÁNGULO NEGATIVO

Si el lado terminal realiza una rotación completa, en el sentido contrario de las agujas del reloj, el ángulo generado mide 360°

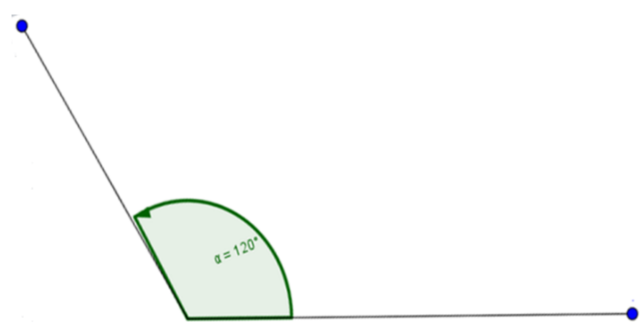


EJEMPLOS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

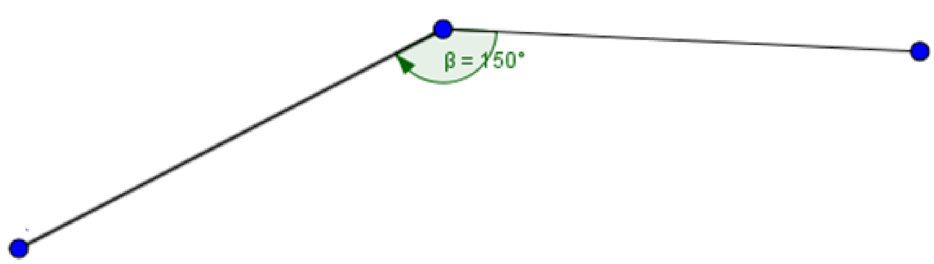
Ángulo de 40°



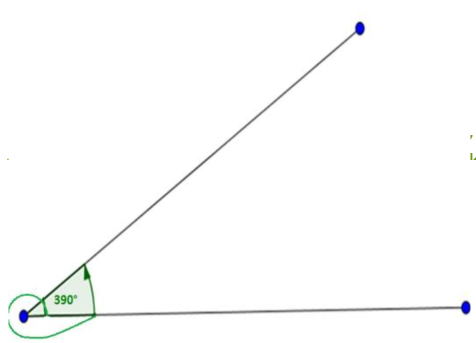
Ángulo de 120°



Ángulo de -150°

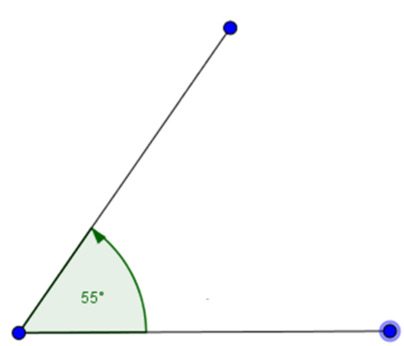


Ángulo de 390°



ACIÓN:

Ángulo de 55°



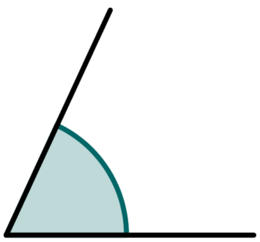
Realizar la representación gráfica de los siguientes ángulos y determinar en cuál cuadrante se encuentran:

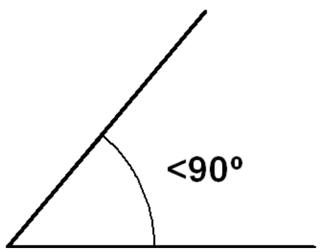
- 50°
- 45°
- 400°
- 750°
- -60°
- 270°
- -100°
- 180°
- -210°
- 445°
- 320°
- -270°

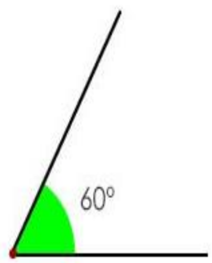
CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

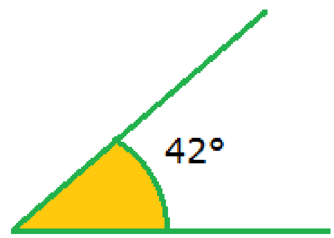
Los ángulos se clasifican y denominan en función de la medida de sus grados.

Ángulo agudo: es un ángulo cuya medida está entre 0° y 90°.

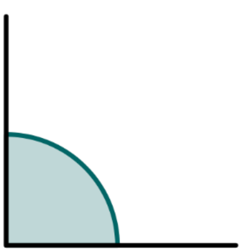

Agudo

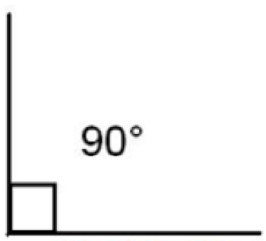


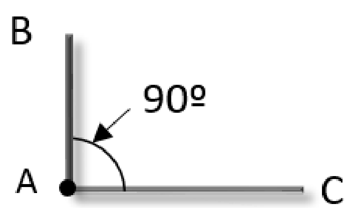


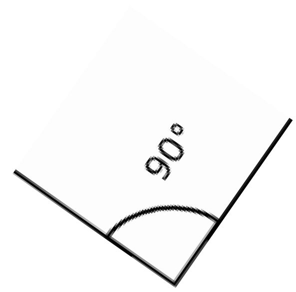


Ángulo recto: es un ángulo que mide 90°.

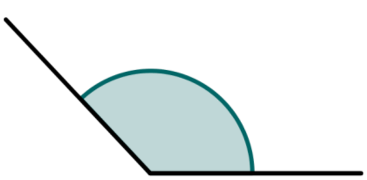

Recto

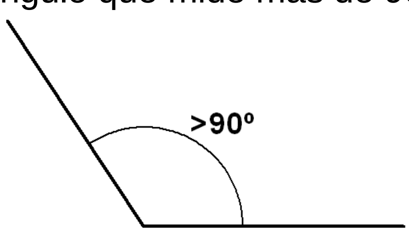


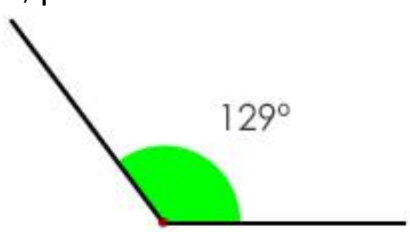




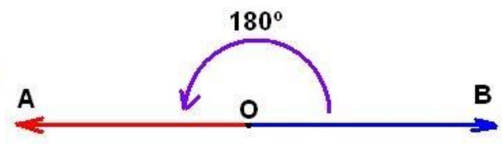
Ángulo obtuso: es un ángulo que mide más de 90°, pero menos de 180°

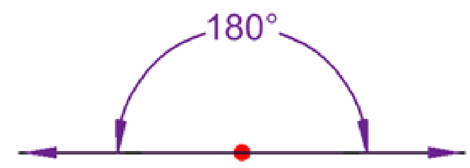

Obtuso



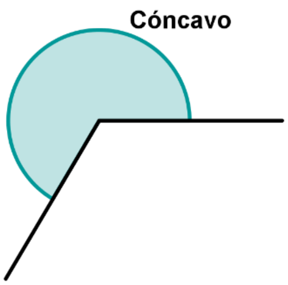


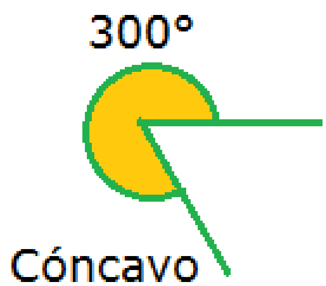
Angulo colineal o llano: es un ángulo que mide 180°

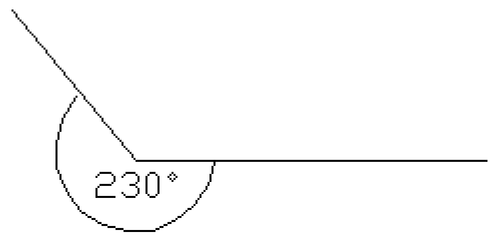




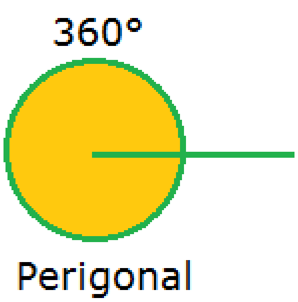
Ángulo cóncavo o entrante: es un ángulo mayor de 180° y menor de 360°

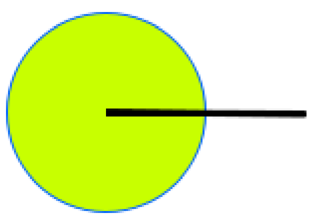
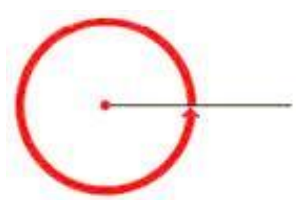






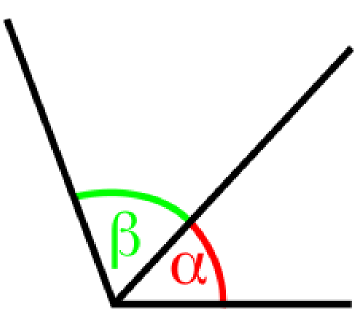
Ángulo perigonal o completo: es un ángulo que mide 360°

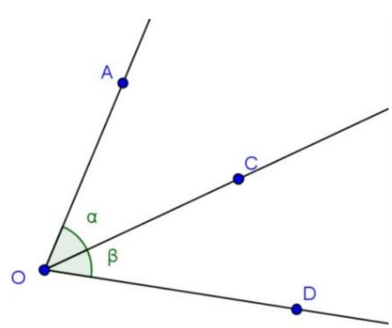


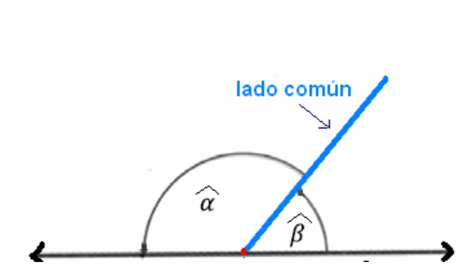



CLASIFICACIÓN CUANDO SE TIENEN DOS ÁNGULOS:

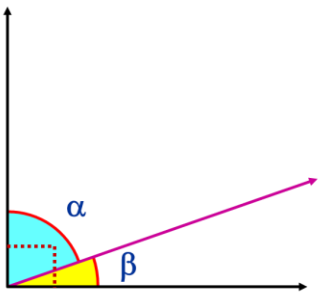
Consecutivos: Dos ángulos son consecutivos cuando tienen un lado en común y están en un mismo plano.

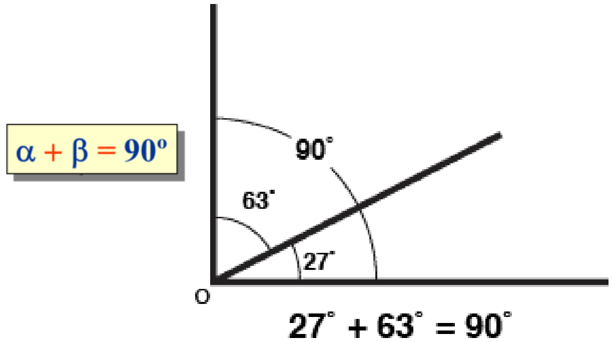


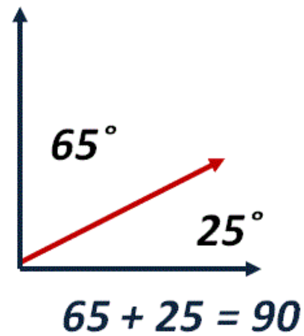




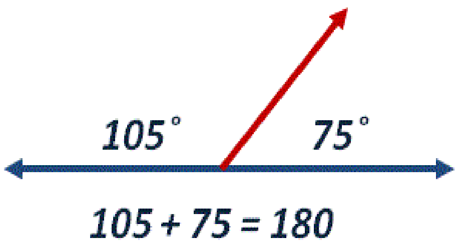
Complementarios: Son dos ángulos que suman 90°

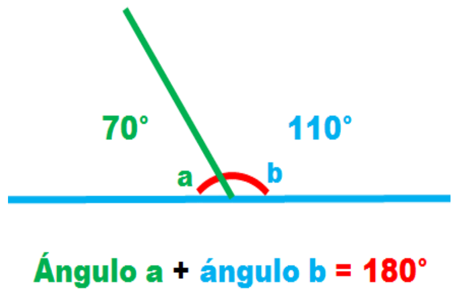


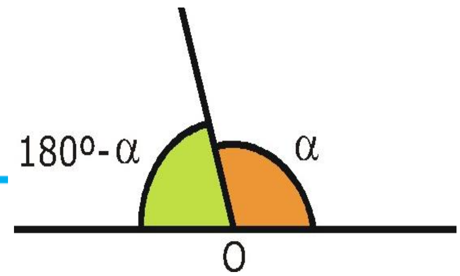




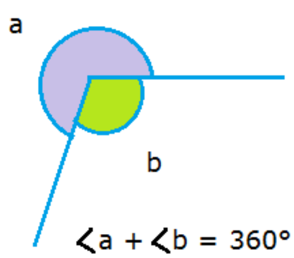
Suplementarios: Son dos ángulos que suman 180°

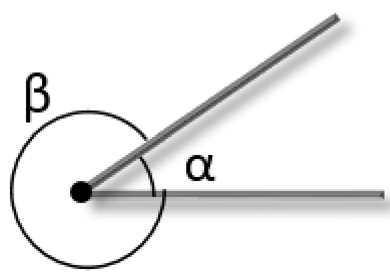


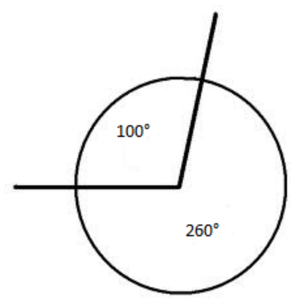




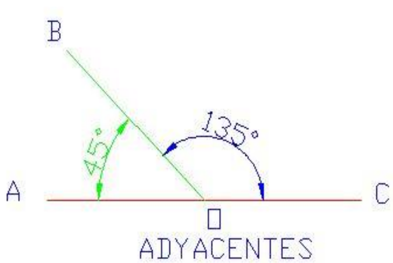
Conjugados: Son dos ángulos que suman 360°

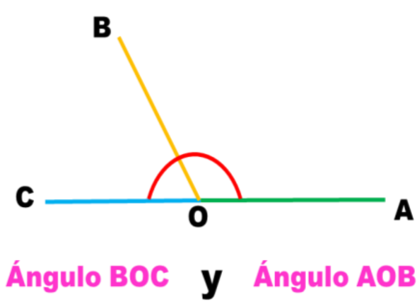


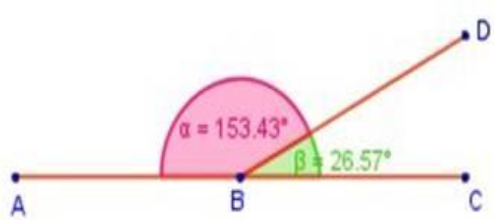




Adyacentes: Son pares de ángulos consecutivos, cuya suma es igual a 180°, además estos ángulos son suplementarios.

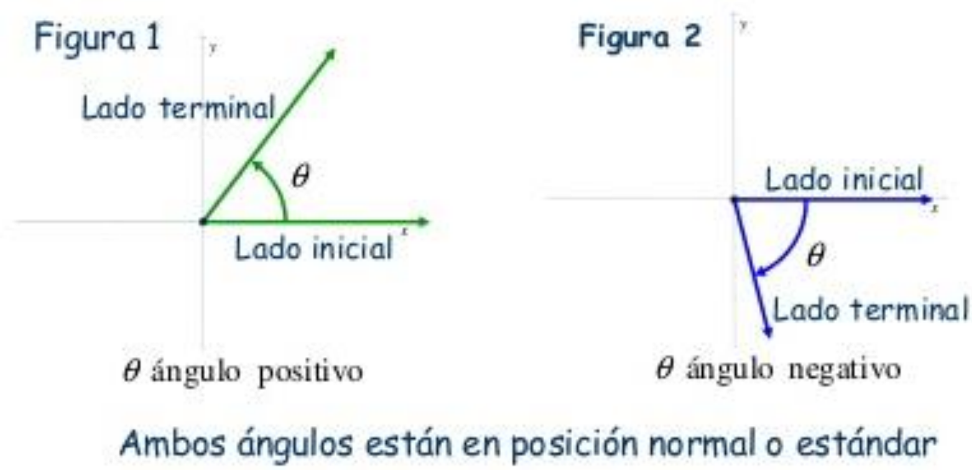






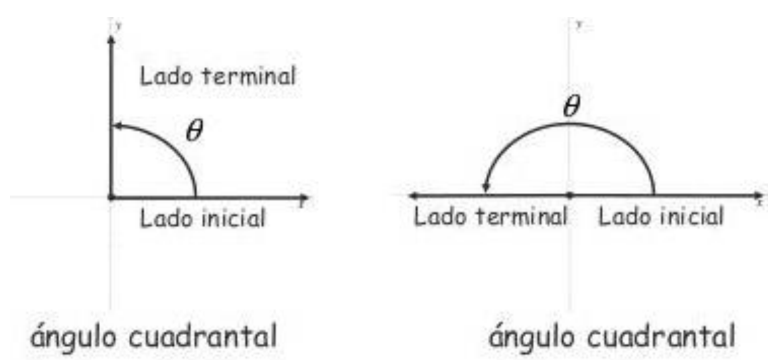
Ángulos en posición normal (estándar)

Un ángulo en un sistema de coordenadas rectangular está en la posición normal o estándar si su vértice está en el origen y su lado inicial a lo largo del eje positivo de X. Una rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj produce un ángulo positivo (Figura 1) y una rotación en el sentido de las manecillas del reloj produce un ángulo negativo (Figura 2)



Ángulos cuadrantales

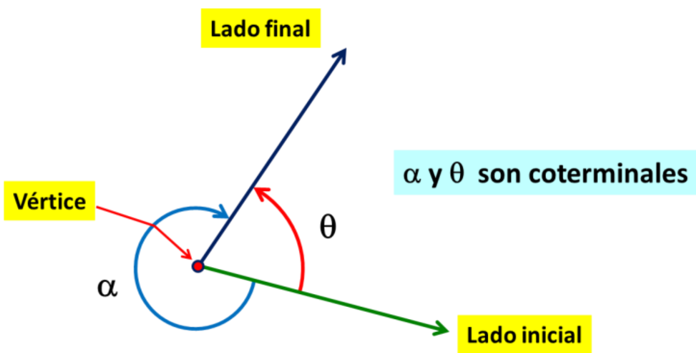
Un ángulo cuadrantal es un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal yace sobre un eje coordenado

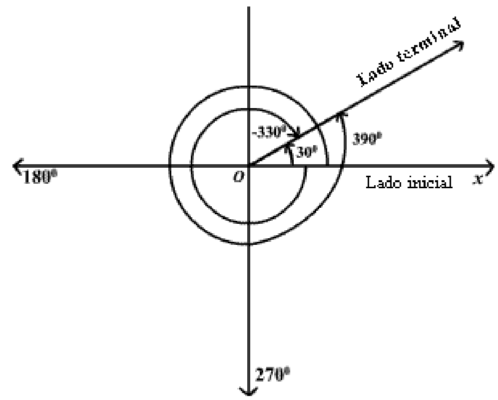


Los ángulos que miden 0°, 90°, 180°, 270° y 360° son ángulos cuadrantales (ángulos en posición estándar que su lado terminal yace sobre los ejes ***X*** o ***Y***)

Ángulos Coterminales

Dos o más ángulos son coterminales, si tienen el mismo vértice y sus lados inicial y final coincidentes respectivamente. Un ángulo puede tener infinitos ángulos coterminales. Por ejemplo 30°, –330° y 390° son todos coterminales.





Para encontrar un ángulo coterminal positivo y uno negativo con un ángulo dado, puede sumar y restar 360° si el ángulo es medido en grados o 2π si el ángulo es medido en radianes.

Para encontrar ángulos coterminales se utiliza la siguiente fórmula:

$$\theta_{coterminal} = \begin{cases} \theta \pm 360°k, para\ ángulos\ en\ grados \\ \theta \pm 2\pi°k, para\ ángulos\ en\ radianes \end{cases} donde\ \boldsymbol{k}\ es\ el\ número\ de\ revoluciones$$

En los siguientes ejemplos utilizaremos como ***k*** el valor de una revolución, pero recuerda que este valor puede variar.

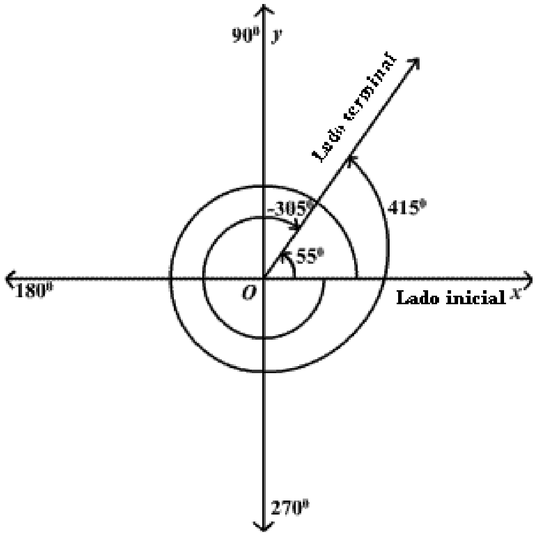
Ejemplo 1:

Encuentre un ángulo coterminal positivo y uno negativo con un ángulo de 55°.

55° – 360° = –305°

55° + 360° = 415°

Un ángulo de –305° y un ángulo de 415° son coterminales con un ángulo de 55°.



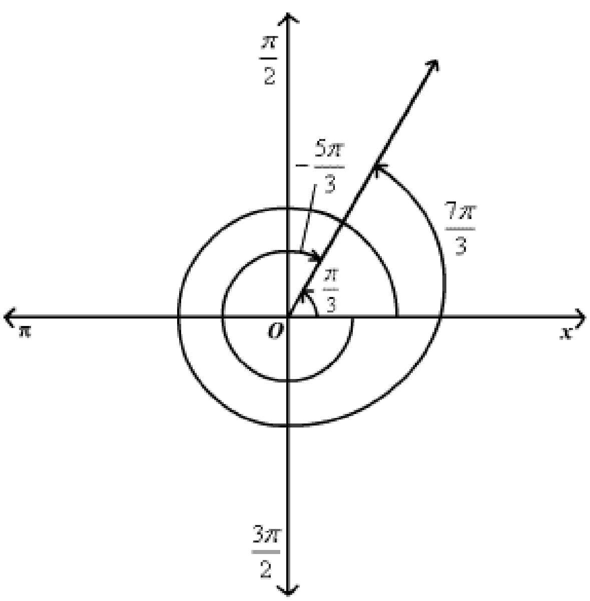
Ejemplo 2:

Encuentre un ángulo coterminal positivo y uno negativo con un ángulo de. $\frac{\pi}{3}$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$$

Un ángulo de $\frac{7\pi}{3}$ y un ángulo de $\frac{-5\pi}{3}$ son coterminales con un ángulo de $\frac{\pi}{3}$



EJERCICIO DE APLICACIÓN

1. Hallar dos ángulos coterminales con -240°
2. Hallar dos ángulos coterminales con $\frac{7\pi}{3}$
3. Hallar dos ángulos coterminales con 170°
4. Hallar dos ángulos coterminales con $\frac{4\pi}{3}$
5. Hallar dos ángulos coterminales con – 150°

SISTEMA SEXAGESIMAL

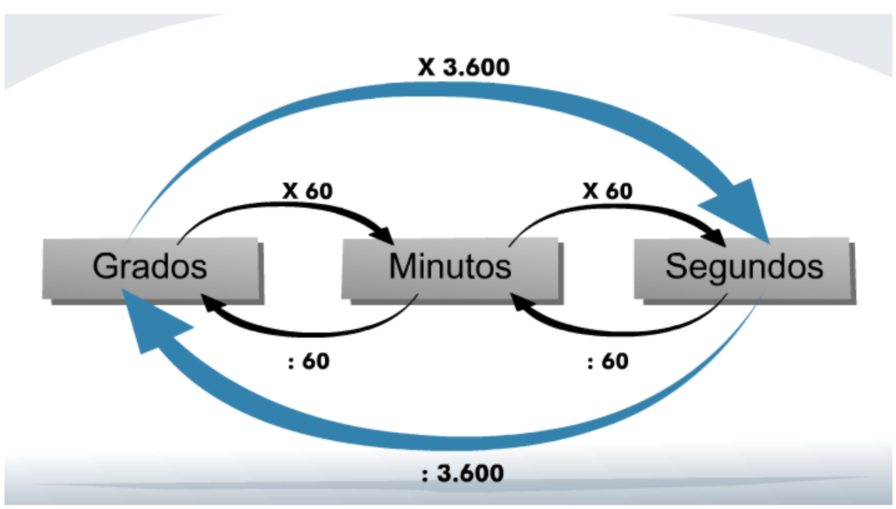
El sistema sexagesimal es un sistema de numeración en el que cada unidad se divide en 60 unidades de orden inferior, es decir, es un sistema de numeración en base 60**.** Se aplica en la actualidad a la medida del tiempo y a la de la amplitud de los ángulos**.**

1h $\rightarrow$ 60 min $\rightarrow$ 60 seg

1° $\rightarrow$ 60 min $\rightarrow$ 60 seg

Un grado sexagesimal es la medida del ángulo con vértice en el centro del círculo, de amplitud igual a la 360- ava parte del mismo. Cada división de la circunferencia se llama grado, cada grado se considera dividido en 60 partes iguales llamadas minutos y cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos.

El grado sexagesimal es el ángulo que se obtiene al dividir la circunferencia en 360 partes iguales. Un grado sexagesimal tiene 60 minutos: 1° = 60' • Un minuto sexagesimal tiene 60 segundos: 1' = 60''



Los símbolos son:

Grados **(°)** Minutos **(’)** Segundos **(’’)**

Para efectuar las conversiones entre este sistema de unidades se debe tener en cuenta la unidad actual y la unidad a la cual se va a pasar, si es a una unidad menor se multiplica y si es a una unidad mayor se divide.

EJEMPLOS:

1. Expresar 3800’’ en grados, minutos y segundos sexagesimales:

<u>Solución:</u> Como en este caso vamos a pasar de una unidad menor (segundos) a otras mayores, tendremos que ir dividiendo por 60.

3800’’	60’’
200	63 min
20’’	

Primero dividimos 3800’’ por 60 y así obtenemos los minutos. En este caso nos dio 63 min.
El residuo que nos queda son los segundos (20’’).
Después dividimos los 63 minutos por 60 para poder obtener los grados.

63’	60’
3’	1°

Al dividir los 63’ por 60, se obtienen los grados y el residuo que queda serán los minutos.

Por lo tanto, la Respuesta será: **1° 3’ 20’’**

2. Expresar 2930’’ en grados, minutos y segundos sexagesimales:

<u>Solución:</u> Como en este caso vamos a pasar de una unidad menor (segundos) a otras mayores, tendremos que ir dividiendo por 60.

2930’’	60’’
530	48 min
50’’	

Primero dividimos 2930’’ por 60 y así obtenemos los minutos. En este caso nos dio 48 min.
El residuo que nos queda son los segundos (50’’)

Después dividimos los 48 minutos por 60 para poder obtener los grados.

48’	60’
48’	0°

Al dividir los 48’ por 60, se obtienen los grados y el residuo que queda serán los minutos.

Por lo tanto, la Respuesta será: **0° 48’ 50’’**

3. Expresar 340’ en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad menor (segundos) a otra mayor, tendremos que ir dividiendo por 60.

340’	60’
40’	5°

Como en este caso no se dio la unidad en segundos, significa que éstos son igual a cero y por lo tanto solamente se debe pasar los minutos a grados.

Por lo tanto, la respuesta será: **5° 40’ 0’’**

4. Expresar 810’ en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad menor (segundos) a otra mayor, tendremos que ir dividiendo por 60.

810’	60’
210	13°
30’	

Como en este caso no se dio la unidad en segundos, significa que éstos son igual a cero y por lo tanto solamente se debe pasar los minutos a grados.

Por lo tanto, la respuesta será: **13° 30’ 0’’**

5. Expresar 3,24° en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad mayor (grados) a otra menor, tendremos que ir multiplicando por 60.

3°

En primer lugar, dejaremos 3° tal y como lo enuncia el ejercicio y la parte decimal la pasaremos a minutos y segundos haciendo uso de la multiplicación.

0,24° x 60’= 14,40’

Al efectuar la multiplicación dejaremos la parte entera como los minutos (14) y la parte decimal que es igual a 0,40 la multiplicaremos por 60 segundos.

0,40’ x 60’’ = 24”

Al realizar la conversión de minutos (0,40’) a segundos, se obtiene como resultado 24’’.

Por lo tanto, la respuesta final será: **3° 14’ 24’’**

6. Expresar 2,65° en grados, minutos y segundos sexagesimales:

Solución: Como en este caso vamos a pasar de una unidad mayor (grados) a otra menor, tendremos que ir multiplicando por 60.

2°

En primer lugar dejaremos 2° tal y como lo enuncia el ejercicio y la parte decimal la pasaremos a minutos y segundos haciendo uso de la multiplicación.

0,65° x 60'= 39'

Al efectuar la multiplicación observamos que no quedan decimales, por lo tanto no hay segundos y la respuesta final será: **2° 39' 0''**

7. Convertir a segundos 6° 12' 40"

Solución: Para solucionar este ejercicio podemos hacer uso de la tabla de valores descrita inicialmente, en la cual 1°= 3600'' y 1' = 60''. Por lo tanto, realizaremos la conversión de cada magnitud y finalmente se efectuará la suma:

6° a segundos= 6 x 3600'' = 21.600''

12' a segundos = 12 x 60'' = **720''**

40'' = **40''**

Finalmente se hace la suma de los valores: 21.600'' + 720'' + 40'' y nos da como respuesta final **22.360''**

8. Convertir a grados 960' 1080''

Solución: Para solucionar este ejercicio podemos hacer uso de la tabla de valores descrita inicialmente, en la cual 1°= 3600'' y 1' = 60''. Por lo tanto, realizaremos la conversión de cada magnitud y finalmente se efectuará la suma:

960' a grados= 960' ÷ 60' = 16°

1080'' a grados = 1080'' ÷ 3600'' = **0.3°**

Finalmente se hace la suma de los valores: 16° + 0,3° y nos da como respuesta final **16,3°**

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN:

Expresar la medida de los siguientes ángulos en grados, minutos y segundos:

12,45°	9,25°	275’
4900’’	3224’’	1897’
17,23°	890’	34,05°
7894”	28,56°	49,75°
8,42°	6890’’	754’
16,45°	7452’’	8652’’
7,37°	26,33°	190’
17,44°	995’	12020’’

MEDIDA ANGULAR EN RADIANES

EJEMPLOS:

1. Encontrar la medida en radianes de θ, si θ= 30°

180° = π rad
30° = x

180° = π rad
30° = x

X . 180 = π rad . 30

X = $\frac{30\pi \text{ rad}}{180}$

Al simplificar 30 con 180 se obtiene: $\frac{1}{6}\pi$ **rad**

2. Encontrar la medida en radianes de θ, si θ= 135°

$180° = \pi$ rad
$135° =$ x

$180° = \pi$ rad
$135° =$ x

X . 180 = π rad . 135

X = $\frac{135\pi \text{ rad}}{180}$

Al simplificar 135 con 180 se obtiene: $\frac{3}{4}\pi$ **rad**

3. Encontrar la medida en radianes de θ, si θ= 210°

$180° = \pi$ rad
$210° =$ x

$180° = \pi$ rad
$210° =$ x

X . 180 = π rad . 210

X = $\frac{210\pi \text{ rad}}{180}$

Al simplificar 210 con 180 se obtiene: $\frac{7}{6}\pi$ **rad**

4. Encontrar la medida en radianes de θ, si θ= - 150°

$180° = \pi$ rad
$-150° =$ x

$180° = \pi$ rad
$-150° =$ x

X . 180 = π rad . - 150

X = $\frac{-150\pi \text{ rad}}{180}$

Al simplificar -150 con 180 se obtiene: $\frac{-5}{6}\pi$ **rad**

5. Encontrar la medida en grados de θ, si θ= $\frac{\pi}{6}$ rad

$180° = \pi$ rad
X = $\frac{\pi}{6}$ rad

$180° = \pi$ rad
X = $\frac{\pi}{6}$ rad

X . π = 180 . $\frac{\pi}{6}$

x. π rad = 30π

x = $\frac{30\pi}{\pi}$ → X = 30°

Al simplificar 180 con $\frac{\pi}{6}$, se obtiene 30π y al simplificar

$$\frac{30\pi}{\pi} = \mathbf{30°}$$

6. Encontrar la medida en grados de θ, si θ= $\frac{11\pi}{6}$ rad

$180° = \pi$ rad
X $= \frac{11\pi}{6}$ rad

$180° = \pi$ rad
X $= \frac{11\pi}{6}$ rad

$X \cdot \pi = 180 \cdot \frac{11\pi}{6}$

$x \cdot \pi$ rad $= 330\pi$

$x = \frac{330\pi}{\pi}$ X = 330°

Al simplificar 180 con $\frac{11\pi}{6}$, se obtiene 330π y al simplificar

$$\frac{330\pi}{\pi} = \mathbf{330°}$$

DEFINICIÓN DE REVOLUCIÓN:

En matemáticas, revolución se usa con el significado de “vuelta” o “giro”. Una revolución corresponde a un giro de 360°.

Para hacer la conversión de ángulos a revoluciones se plantean las proporciones, haciendo uso de regla de tres simple directa.

A. Encontrar la medida en grados que corresponde a los siguientes ángulos dados en radianes, dibujar los ángulos y establecer en cuál cuadrante se encuentran:

1. $5\pi / 18$
2. $\pi / 9$
3. $\frac{-2}{3}\pi$
4. $\frac{13}{10}\pi$
5. $\frac{-5}{9}\pi$

B. Encontrar la medida en radianes que corresponde a la medida del ángulo dado en grados, dibujar los ángulos y establecer en cuál cuadrante se encuentran:

1. 100°
2. 630°
3. 72°
4. – 450°
5. 54°

C. Si una revolución corresponde a un giro de 360°, efectuar las siguientes conversiones:

1) ¿Cuántas revoluciones son 240°?
2) ¿A cuántos grados equivale $\frac{1}{8}$ de revolución?
3) ¿Cuántas revoluciones hay en 90°?

4) ¿Cuántas revoluciones hay en 720°?
5) ¿Cuántos grados hay en $\frac{3}{4}$ de revolución?

D. Completar el siguiente cuadro

	1	2	3	4	5	6	7
Grados	720°				360°		225°
Radianes			$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$			
Revoluciones		$\frac{3}{2}$				$\frac{3}{4}$	

SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

Para operar en el **sistema sexagesimal** debemos tener en cuenta que cada **unidad se divide en 60 unidades** de orden inferior.

1 h ⟶ 60 min ⟶ 60 s

1° ⟶ 60' ⟶ 60''

Suma

Se disponen las horas debajo de las horas (o los grados debajo de los grados), los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos; y se suman.

Sumar: 24°58’37” + 18°32’48”:

Sumar: 59°45’13” +100°25’23”:

Sumar: 124°32’47” + 28°25’14”:

Sumar: 65°57’55” + 55°58’46”:

Sumar: 33°33’33” + 44°44’44”:

Sumar: 100°5’59” + 20°59’23”:

Sumar: 77°59’59” + 87°49’59”:

Sumar: 14°13’27” + 58°49’ + 25°30’54”:

Sumar: 19°48’54” + 0°39’55” + 16°0’57”:

Resta

1°. Se disponen las horas debajo de las horas (o los grados debajo de los grados), los minutos debajo de los minutos y los segundos debajo de los segundos.

2º. Se restan los segundos. Si el minuendo es menor que el sustraendo, pasamos un minuto del minuendo a 60 segundos y se lo sumamos a los segundos del minuendo. A continuación, restamos los segundos.

EJEMPLOS:

Realiza las siguientes restas:

1. Restar 68°35’42” – 56°46’39”:
2. Restar: 105°50’36” – 77°48’20”:
3. Restar: 29°0’16” – 14°35’8”:
4. Restar: 137°52’36” – 88°59’44”:
5. Restar 66°33’8” – 55°55’55”:
6. Restar 71°10’28” – 41°58’59”:

7. Restar 100°33’13” – 98°53’35”:

8. Restar 25°40’31” – 16°41’32”:

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

A. Haciendo uso del concepto de conversión de suma y resta de ángulos, dar solución a los siguientes ejercicios:

1) 28° 30’ + 20° 30’
2) 90° – 40° 30’
3) 25° 30’ + 30° 30’
4) 57° 45’ – 47° 15’
5) 44° 53’ 37” + 32° 35’ 42”
6) 53’ 14” + 58° 25’ 22”
7) 23° 40’ 19” + 47° 25’ 32”
8) 56° 32’ 11” – 14° 34’ 33”
9) 44° 44’ 44” + 55° 55’ 55”
10) 107° 2’ 23” – 95° 36’ 59”

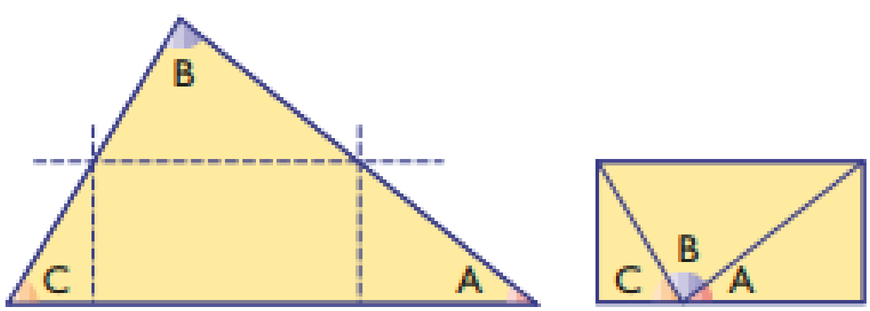
B. Un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 23° 44’ 53”. ¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos?

C. Un ángulo mide 43° 28’ 45”. Halla cuánto mide el complementario.

D. Un ángulo mide 83° 14’ 27”. Halla cuánto mide el suplementario.

E. Cada uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles mide 45° 55’ 17”. Halla cuánto mide el ángulo desigual.

F. En el siguiente triángulo, el ángulo A mide 37° 22’ 45” y el ángulo B mide 83° 53’ 48”. ¿Cuánto m

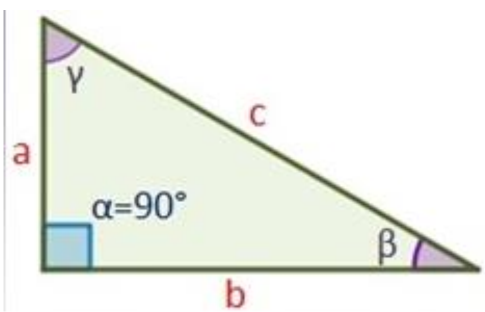


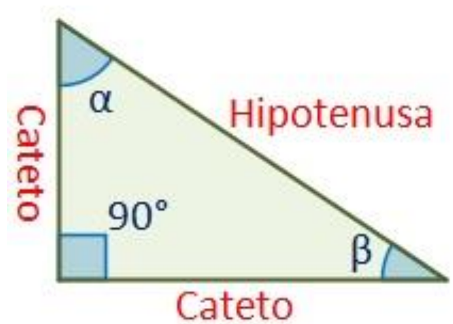
Triángulos rectángulos

TRIÁNGULO RECTÁNGULO: Un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto (es decir, mide 90°) en uno de sus ángulos agudos.

Los lados en un triángulo rectángulo tienen nombres, de esta forma llamamos hipotenusa al lado de mayor tamaño que además es el que siempre se encuentra en el lado opuesto al ángulo recto, los otros dos lados reciben la denominación de catetos.

En todo **triángulo rectángulo** se cumple que: Tiene dos ángulos agudos. La hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos. La altura que parte del vértice del ángulo recto, coincide con un cateto, con tal de considerar al otro cateto como una base.

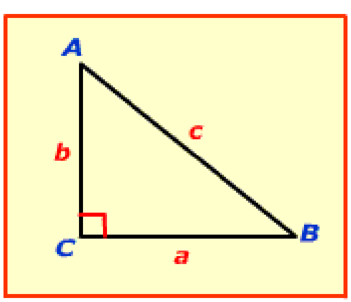




TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS ESPECIALES

Se consideran triángulos especiales en el estudio de la trigonometría, aquellos que tienen como ángulos 45°- 45° - 90° y 30° - 60° - 90°.

Teorema del triángulo rectángulo Isósceles (45° - 45° - 90°)



En un triángulo recto isósceles, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ más larga que la longitud de cada cateto, o sea, es el resultado de la multiplicación de la medida de uno de los catetos por $\sqrt{2}$.

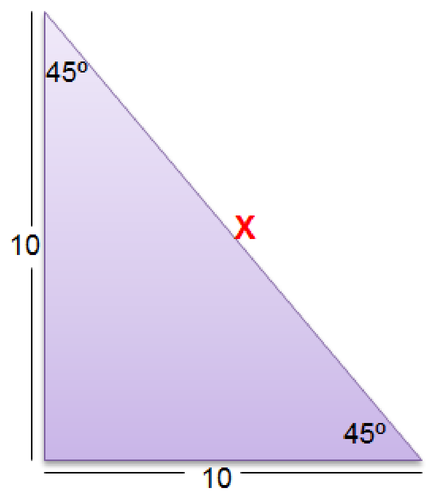
a = b

c = $a\sqrt{2}$ y c= $b\sqrt{2}$, ya que a = b

Por lo tanto, $a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$ por ser un triángulo isósceles

Ejemplos:

1. En el siguiente triángulo rectángulo hallar el valor de la hipotenusa.

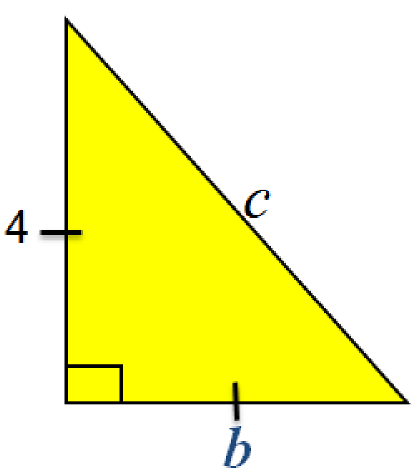


Solución:

- ✓ *Como se trata de un triángulo rectángulo isósceles, para calcular la hipotenusa (X) sólo es necesario multiplicar el valor de uno de sus lados por* $\sqrt{2}$

***X** = $10\sqrt{2}$*

2. Encontrar la medida de las variables en el siguiente triángulo rectángulo isósceles:

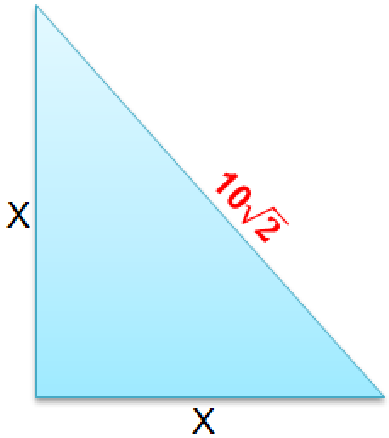


Solución:

- ✓ *Como se trata de un triángulo rectángulo isósceles, para calcular las variables sólo es necesario:*
- ✓ *b=4, porque ambos catetos tienen la misma medida.*
- ✓ *Para calcular la hipotenusa (C) sólo es necesario multiplicar el valor de uno de sus lados por* $\sqrt{2}$

***C** = $4\sqrt{2}$*

3. Hallar la medida de los catetos en el siguiente triángulo rectángulo isósceles.



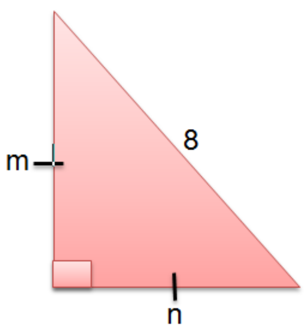
Solución:

- ✓ *Como se trata de un triángulo rectángulo isósceles, el valor de la hipotenusa sería:*
  $h = x.\sqrt{2}$,
- ✓ *En este ejercicio* $h = 10\sqrt{2}$
- ✓ *por lo tanto, para calcular el valor del cateto se despeja el valor de la incógnita en la ecuación:*

$$h = x.\sqrt{2} \longrightarrow X = \frac{h}{\sqrt{2}} \longrightarrow X = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

- ✓ *por lo tanto, simplificando en la fracción* $\sqrt{2}$, *el valor de la* $X = 10$

4. Hallar la medida de las variables m y n en el siguiente triángulo rectángulo isósceles:



Solución:

- ✓ *Como se trata de un triángulo isósceles, las variables m y n tienen el mismo valor y corresponden a un cateto.*
- ✓ *para calcular el valor del cateto se despeja el valor de la incógnita en la ecuación:*

$$h = m.\sqrt{2} \longrightarrow m = \frac{h}{\sqrt{2}} \longrightarrow m = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

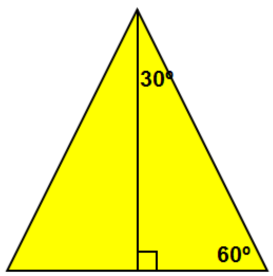
En este caso como el valor de m tiene en el denominador una raíz se recomienda que se racionalice el denominador.

$$\frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

- ✓ *por lo tanto, el valor de la* $m = 4\sqrt{2}$

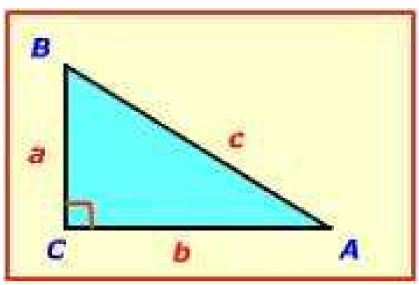
Teorema relacionado con los triángulos (30° - 60° - 90°)

Un triángulo de 30° - 60° - 90° resulta después de cortar a la mitad un triángulo equilátero:



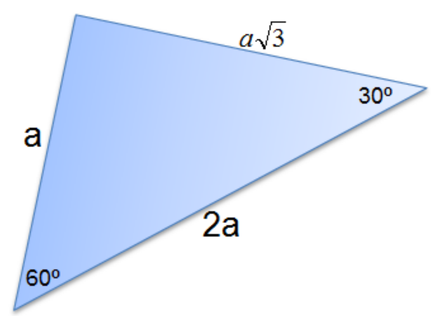
En un triángulo de 30º - 60º - 90º la medida de la hipotenusa es dos veces mayor que la medida del cateto de menor longitud, y la longitud del cateto mayor es $\sqrt{3}$ más grande que la longitud del cateto menor.

Suponga que a < b, entonces;



$c = 2a$

$b = a\sqrt{3}$



Cateto Largo= $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \boldsymbol{hipotenusa}$

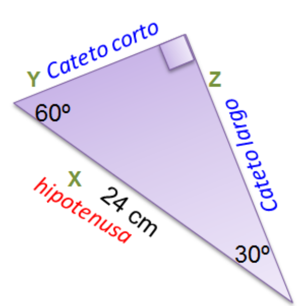
Cateto Corto= $\frac{\boldsymbol{hipotenusa}}{\mathbf{2}}$

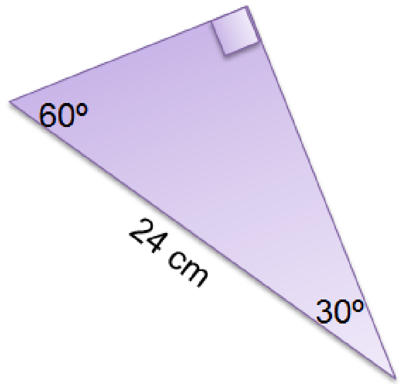
Cateto Largo= $\sqrt{3} \times \boldsymbol{Cateto\ Corto}$

Cateto Corto= $\frac{\boldsymbol{Cateto\ Largo}}{\sqrt{3}}$

Ejemplos:

1. En el siguiente triángulo hallar la medida del cateto y la hipotenusa:





Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la medida de los catetos es proporcional al valor de su ángulo, por lo tanto, el cateto más largo queda frente al ángulo mayor y el cateto más corto queda frente al ángulo menor.*

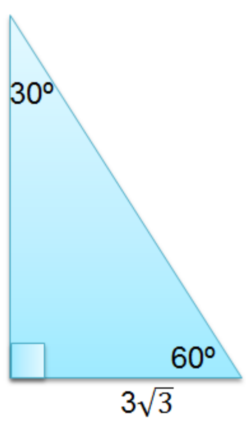
- ✓ *Como se conoce el valor de la hipotenusa (24 cm), el valor del cateto corto (Y) es igual a la mitad, es decir 12 cm*

  $Y = \frac{24\ cm}{2}$ **= 12 cm**

- ✓ *Para calcular el cateto más largo (Z) se puede realizar con el valor de la hipotenusa o con el valor del cateto más corto, en este caso es un poco más sencillo hacerlo con el valor del cateto corto:*

  Z = $12\ cm \times \sqrt{3} = \mathbf{12\sqrt{3}\ cm}$

2. En el siguiente triángulo hallar la medida del cateto y la hipotenusa



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la medida de los catetos es proporcional al valor de su ángulo, por lo tanto, el cateto más largo queda frente al ángulo mayor y el cateto más corto queda frente al ángulo menor.*

- ✓ *Como se conoce el valor del cateto más corto ($3\sqrt{3}$), el valor de la hipotenusa es igual al doble del cateto corto*

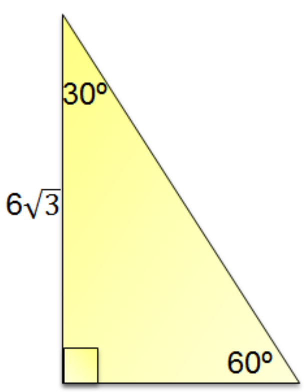
Hipotenusa= *2. ($3\sqrt{3}$),* **= $6\sqrt{3}$**

- ✓ *Para calcular el cateto más largo se puede realizar con el valor de la hipotenusa o con el valor del cateto más corto, en este caso es un poco más sencillo hacerlo con el valor del cateto corto:*

Cateto largo = $\sqrt{\mathbf{3}} \times \boldsymbol{Cateto\ Corto}$

$= \sqrt{\mathbf{3}} \times (\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}}) = \mathbf{3}\sqrt{\mathbf{9}} = \mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{9}$

3. En el siguiente triángulo hallar la medida del cateto y la hipotenusa



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la medida de los catetos es proporcional al valor de su ángulo, por lo tanto, el cateto más largo queda frente al ángulo mayor y el cateto más corto queda frente al ángulo menor.*

✓ *Como se conoce el valor del cateto más largo ($6\sqrt{3}$), se puede calcular el valor del otro cateto (cateto corto).*

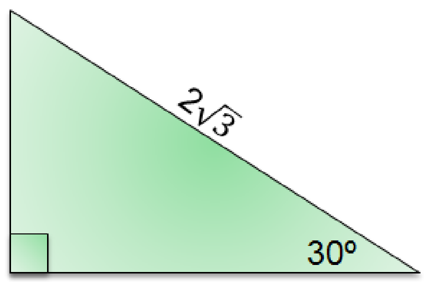
Cateto Corto= $\dfrac{\boldsymbol{Cateto\ Largo}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$ Cateto Corto= $\dfrac{6\sqrt{3}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$

✓ *Simplificando $\sqrt{3}$, el valor del cateto será igual a* ***6***

✓ *Para calcular la hipotenusa se multiplica el cateto corto por 2, teniendo en cuenta que la hipotenusa es el doble de este valor.*

Hipotenusa= *2. (6),* **= 12**

4. En el siguiente triángulo hallar la medida de los catetos:



Solución:

✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la medida de los catetos es proporcional al valor de su ángulo, por lo tanto, el cateto más largo queda frente al ángulo mayor y el cateto más corto queda frente al ángulo menor.*

✓ *Como se conoce el valor de la hipotenusa, se puede empezar calculando el valor del cateto más corto:*

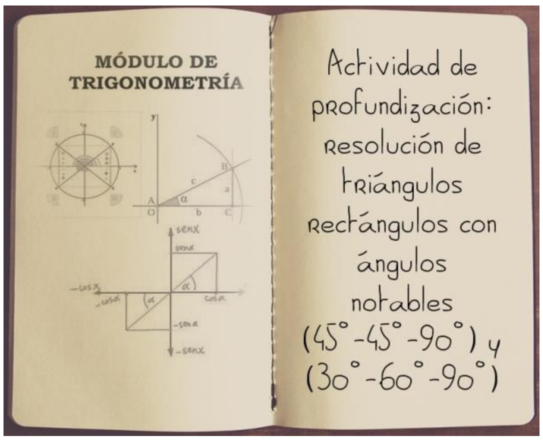
Cateto Corto= $\dfrac{\boldsymbol{hipotenusa}}{\mathbf{2}}$ **=** Cateto Corto= $\dfrac{2\sqrt{3}}{\mathbf{2}}$

✓ *Simplificando 2, el valor del cateto será igual a* $\boldsymbol{\sqrt{3}}$

✓ *Para calcular el cateto más largo se puede realizar con el valor de la hipotenusa o con el valor del cateto más corto, en este caso es un poco más sencillo hacerlo con el valor del cateto corto:*

Cateto largo = $\sqrt{3} \times \boldsymbol{Cateto\ Corto}$

$= \sqrt{3} \times (\sqrt{3}) = \sqrt{9} = 3$

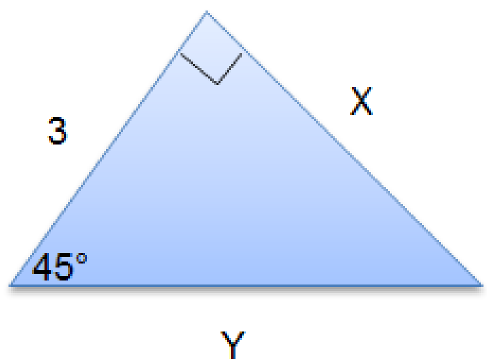


ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

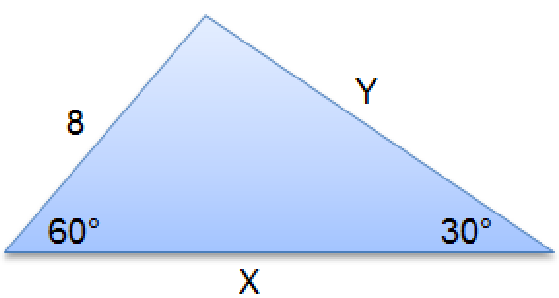
Haciendo uso de los teoremas para triángulos rectángulos de 45° - 45° - 90° y 30° - 60° - 90°, solucionar los siguientes ejercicios, dejando consignado el procedimiento.

1. Hallar la longitud de los valores x, y

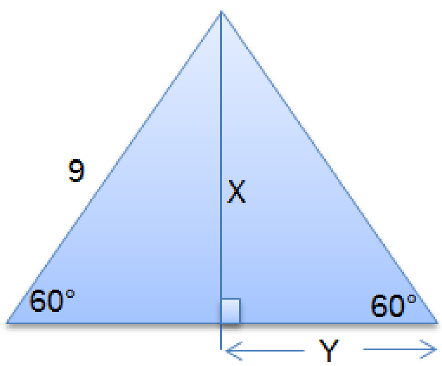
A)



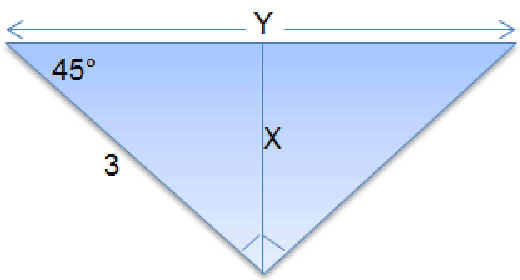
B)



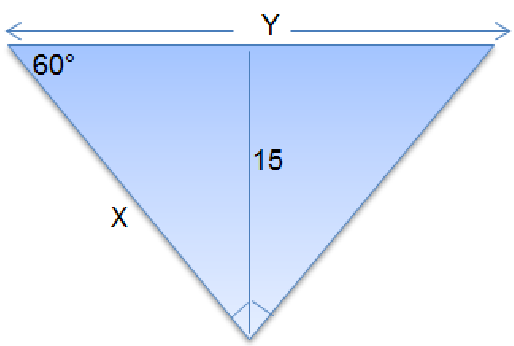
C)



D)



E)



2. La longitud de una diagonal de un cuadrado mide $10\sqrt{2}$ cm. Hallar la medida de la longitud de un lado del cuadrado.

3. La longitud de una altura de un triángulo equilátero es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Encontrar la longitud de un lado del triángulo.

4. El perímetro de un cuadrado es 44 metros. Hallar la longitud de la diagonal del cuadrado.

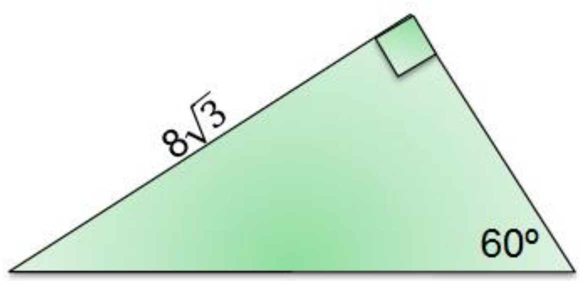
5. La longitud de un lado de un cuadrado es 13 cm. Hallar la longitud de la diagonal.

6. La longitud de un lado de un triángulo equilátero es $6\sqrt{3}$ metros. Hallar la longitud de una altura del triángulo.

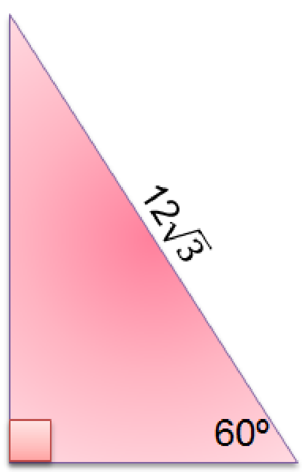
7. La longitud de una altura de un triángulo equilátero es 12 cm. Hallar la longitud de un lado del triángulo.

8. El perímetro de un triángulo equilátero es 39 cm. Hallar la longitud de una altura del triángulo.

9. En el siguiente triángulo hallar el valor de los lados desconocidos:



10. En el siguiente triángulo hallar el valor de los lados desconocidos:

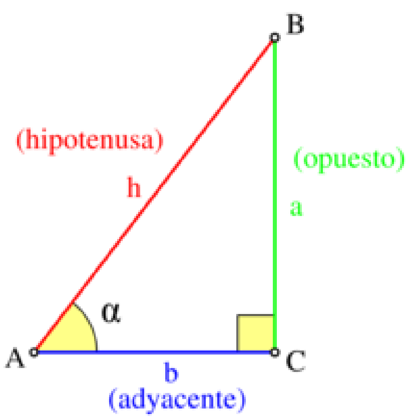


Razones trigonométricas

Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo

Las Razones trigonométricas se definen comúnmente como el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo asociado a sus ángulos. Las funciones trigonométricas son funciones cuyos valores son extensiones del concepto de razón trigonométrica en un triángulo rectángulo trazado en una circunferencia unitaria (de radio unidad). Existen seis funciones trigonométricas básicas.

Para definir las razones trigonométricas del ángulo: **α**, del vértice *A*, se parte de un triángulo rectángulo arbitrario que contiene a este ángulo. El nombre de los lados de este triángulo rectángulo que se usará en lo sucesivo será:



- La hipotenusa (*h*) es el lado opuesto al ángulo recto, o lado de mayor longitud del triángulo rectángulo.
- El cateto opuesto (*a*) es el lado opuesto al ángulo que queremos determinar.
- El cateto adyacente(*b*) es el lado adyacente al ángulo del que queremos determinar.

Todos los triángulos considerados se encuentran en el Plano Euclidiano, por lo que la suma de sus ángulos internos es igual a π radianes (o 180°). En consecuencia, en cualquier triángulo rectángulo los ángulos no rectos se encuentran entre 0 y π/2 radianes. Las definiciones que se dan a continuación definen estrictamente las funciones trigonométricas para ángulos de este rango:

- El **seno** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la longitud de la hipotenusa:

$$\sin\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}.$$

El valor de esta relación no depende del tamaño del triángulo rectángulo que elijamos, siempre que tenga el mismo ángulo α, en cuyo caso se trata de triángulos semejantes.

- El **coseno** de un ángulo la relación entre la longitud del cateto adyacente y la longitud de la hipotenusa:

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}.$$

- La **tangente** de un es la relación entre la longitud del cateto opuesto y la del adyacente:

$$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}.$$

- La **cotangente** de un ángulo es la relación entre la longitud del cateto adyacente y la del opuesto:

$$\cot\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{b}{a}.$$

- La **secante** de un ángulo es la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto adyacente:

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{h}{b}.$$

- La **cosecante** de un ángulo es la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto:

$$\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{h}{a}.$$

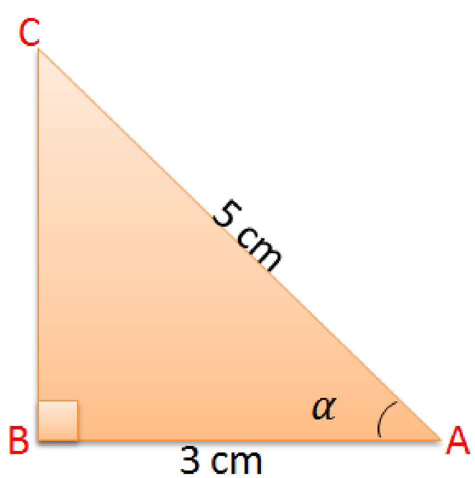
Tabla de funciones trigonométricas

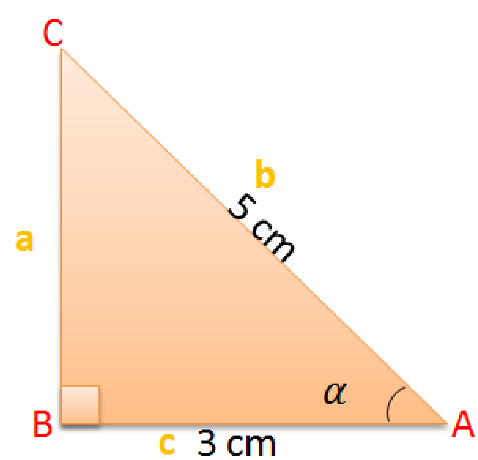
FUNCIÓN	ABREVIATURA	FÓRMULAS	
SENO	Sen	$\frac{Cat.Opuesto}{Hipotenusa}$	$\frac{1}{Csc}$
COSENO	Cos	$\frac{Cat.Adyacente}{Hipotenusa}$	$\frac{1}{Sec}$
TANGENTE	Tan	$\frac{Cat.Opuesto}{Cat.Adyacente}$	$\frac{1}{Cot}$
COTANGENTE	Cot	$\frac{Cat.Adyacente}{Cat.Opuesto}$	$\frac{1}{Tan}$
SECANTE	Sec	$\frac{Hipotenusa}{Cat.Adyacente}$	$\frac{1}{Cos}$
COSECANTE	Csc	$\frac{Hipotenusa}{Cat.Opuesto}$	$\frac{1}{Sen}$

EJEMPLOS:

- Calcular las razones trigonométricas de los siguientes triángulos rectángulos:

1.





Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b).*
- ✓ *Como se desconoce el valor del cateto opuesto (que es el que está frente al ángulo de referencia α), se puede utilizar el teorema de Pitágoras para conocer su valor; en este caso ese valor corresponde a un cateto.*

- ✓ *Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:*

$a^2 = (5\ cm)^2 - (3\ cm)^2$

$a^2 = 25\ cm^2 - 9\ cm^2$

$a^2 = 16\ cm^2$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior

$a = \sqrt{16\ cm^2} = 4\ cm$

- ✓ *Finalmente, el valor obtenido (4 cm) es el valor que corresponde al cateto opuesto.*

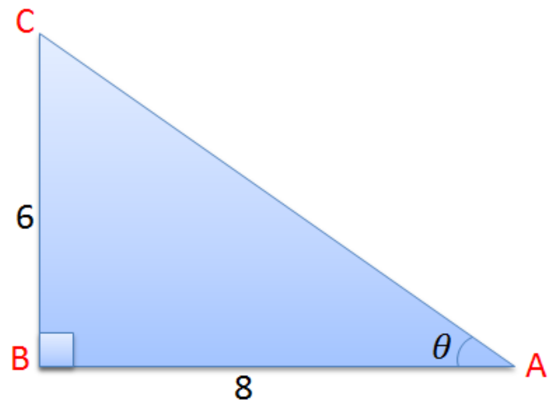
- ✓ *Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo α:*

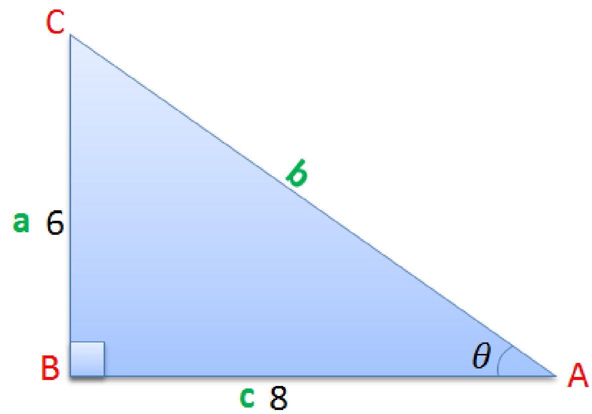
$$Sen\alpha = \frac{Cat.Op.}{Hip} = \frac{a}{b} = \frac{4\ cm}{5\ cm} = 0{,}8 \qquad cos\alpha = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{c}{b} = \frac{3\ cm}{5\ cm} = 0{,}6$$

$$Tan\alpha = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{a}{c} = \frac{4\ cm}{3\ cm} = 1{,}33 \qquad Cot\alpha = \frac{Cat.Ady.}{Cat.Op.} = \frac{c}{a} = \frac{3\ cm}{4\ cm} = 0{,}75$$

$$Sec\alpha = \frac{Hip.}{Cat.Ady} = \frac{b}{c} = \frac{5\ cm}{3\ cm} = 1{,}67 \qquad Csc\alpha = \frac{Hip.}{Cat.op} = \frac{b}{a} = \frac{5\ cm}{4\ cm} = 1{,}25$$

2.





Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- ✓ *Como se desconoce el valor de la hipotenusa, se puede utilizar el teorema de Pitágoras para conocer su valor.*
- ✓ *Para calcular la hipotenusa se suma el cuadrado de sus catetos*

$b^2 = (6)^2 + (8)^2$

$b^2 = 36 + 64$

$b^2 = 100$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la suma anterior

$b = \sqrt{100} = 10$

- ✓ *Finalmente, el valor obtenido (10) es el valor que corresponde a la hipotenusa.*

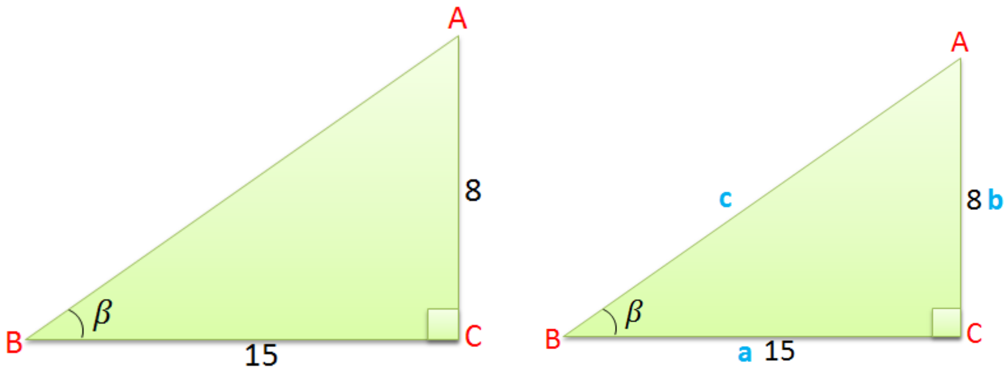
- ✓ *Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo θ:*

$Sen\theta = \frac{Cat.Op.}{Hip} = \frac{a}{b} = \frac{6}{10} = 0{,}6$ $\qquad$ $cos\theta = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{c}{b} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

$Tan\theta = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{a}{c} = \frac{6}{8} = 0{,}75$ $\quad$ $Cot\theta = \frac{Cat.Ady.}{Cat.Op.} = \frac{c}{a} = \frac{8}{6} = 1{,}33$

$Sec\theta = \frac{Hip.}{Cat.Ady} = \frac{b}{c} = \frac{10}{8} = 1{,}25$ $\quad$ $Csc\theta = \frac{Hip.}{Cat.op} = \frac{b}{a} = \frac{10}{6} = 1{,}67$

3.



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (c)*
- ✓ *Como se desconoce el valor de la hipotenusa, se puede utilizar el teorema de Pitágoras para conocer su valor.*
- ✓ *Para calcular la hipotenusa se suma el cuadrado de sus catetos*

$c^2 = (15)^2 + (8)^2$

$c^2 = 225 + 64$

$c^2 = 289$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la suma anterior

$c = \sqrt{289} = 17$

- ✓ *Finalmente, el valor obtenido (17) es el valor que corresponde a la hipotenusa.*

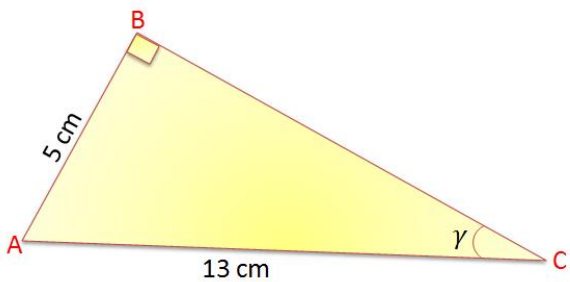
- ✓ *Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo β:*

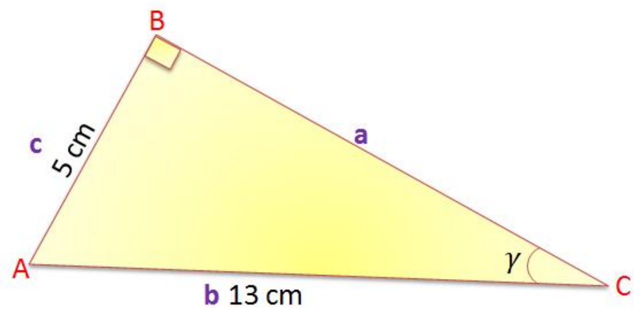
$Sen\beta = \frac{Cat.Op.}{Hip} = \frac{b}{c} = \frac{8}{17} = 0{,}47$ $\quad$ $cos\beta = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{a}{c} = \frac{15}{17} = 0{,}88$

$Tan\beta = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{b}{a} = \frac{8}{15} = 0{,}53$ $\quad$ $Cot\beta = \frac{Cat.Ady.}{Cat.Op.} = \frac{a}{b} = \frac{15}{8} = 1{,}875$

$Sec\beta = \frac{Hip.}{Cat.Ady} = \frac{c}{a} = \frac{17}{15} = 1{,}13$ $\quad$ $Csc\beta = \frac{Hip.}{Cat.op} = \frac{c}{b} = \frac{17}{8} = 2{,}125$

4.





Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- ✓ *En este caso se desconoce el valor del cateto adyacente(a), para calcularlo se puede utilizar el teorema de Pitágoras.*
- ✓ *Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:*

$a^2 = (13\ cm)^2 - (5\ cm)^2$

$a^2 = 169\ cm^2 - 25\ cm^2$

$a^2 = 144\ cm^2$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior

$a = \sqrt{144\ cm^2} = 12\ cm$

- ✓ *Finalmente, el valor obtenido (12 cm) es el valor que corresponde al cateto adyacente.*

- ✓ *Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor de las seis razones trigonométricas para el ángulo γ:*

$Sen\gamma = \frac{Cat.Op.}{Hip} = \frac{c}{b} = \frac{5\ cm}{13\ cm} = 0{,}38$ $\quad$ $cos\gamma = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{a}{b} = \frac{12\ cm}{13\ cm} = 0{,}92$

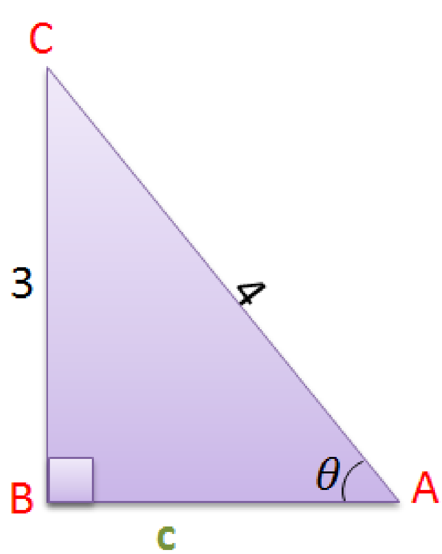
$Tan\gamma = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{c}{a} = \frac{5\ cm}{12\ cm} = 0{,}42$ $\quad$ $Cot\gamma = \frac{Cat.Ady.}{Cat.Op.} = \frac{a}{c} = \frac{12\ cm}{5\ cm} = 2{,}4$

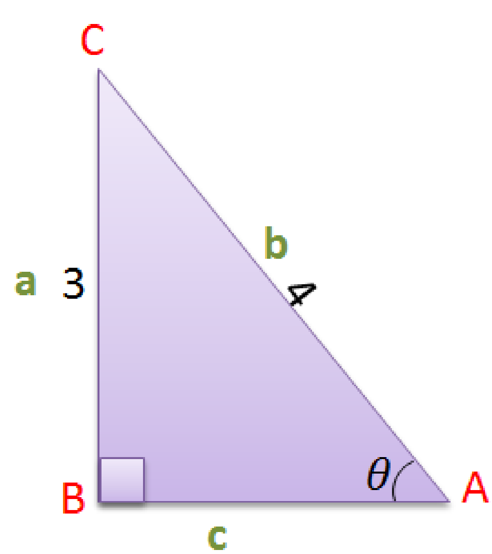
$Sec\gamma = \frac{Hip.}{Cat.Ady} = \frac{b}{a} = \frac{13\ cm}{12\ cm} = 1{,}08$ $\quad$ $Csc\gamma = \frac{Hip.}{Cat.op} = \frac{b}{c} = \frac{13\ cm}{5\ cm} = 2{,}6$

- Hallar el valor de Cosθ y Tanθ, si sen$\theta = \frac{3}{4}$

Solución:

- ✓ *Como* sen$\theta = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \frac{3}{4}$, *entonces 3 es el valor del cateto opuesto del ángulo θ y 4 es la hipotenusa del triángulo rectángulo. Gráficamente quedaría así:*





- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- ✓ *En este caso se desconoce el valor del cateto adyacente(c), para calcularlo se puede utilizar el teorema de Pitágoras.*

- ✓ *Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:*

$c^2 = (4)^2 - (3)^2$

$c^2 = 16 - 9$

$c^2 = 7$

Para eliminar el exponente de la incógnita se le saca raíz cuadrada al resultado obtenido de la resta anterior

c= $\sqrt{7}$ =

- ✓ *En este caso $\sqrt{7}$ no tiene raíz cuadrada exacta, por lo tanto podemos dejarla indicada*

- ✓ *Como ya se conoce el valor de los 3 lados del triángulo rectángulo, se procede a calcular el valor coseno y la tangente para el ángulo θ:*

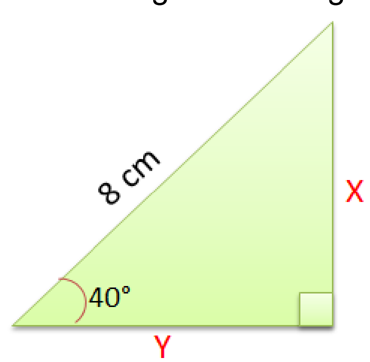
$$\cos\theta = \frac{Cat.Ady.}{Hip} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0{,}66$$

$$Tan\theta = \frac{Cat.Op.}{Cat.Ady} = \frac{a}{c} = \frac{3\ cm}{\sqrt{7}\ cm} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

En el caso de la tangente, como $\sqrt{7}$ queda en el denominador, debemos racionalizarla:

$$\frac{3\ cm}{\sqrt{7}\ cm} = \frac{3.\sqrt{7}}{\sqrt{7}\ .\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{49}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

- En el siguiente triángulo hallar el valor de “X” y “Y”



Solución:

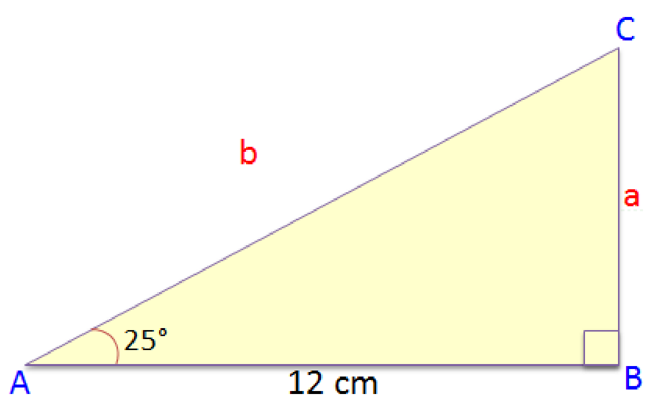
- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (8 cm)*
- ✓ *En este caso se desconoce el valor de los catetos opuesto (X) y adyacente (Y).*
- ✓ *Como se conoce el valor de la hipotenusa y el valor del ángulo, se puede emplear la función seno o coseno, que son las que contienen la hipotenusa.*
- ✓ *En el caso del cateto **X**, se utilizará la función seno:*

$$sen40° = \frac{Cat.op}{hipot} \rightarrow sen40° = \frac{\boldsymbol{X}}{8\ cm} \rightarrow \boldsymbol{X} = sen40°\ x\ 8\ cm \rightarrow \boldsymbol{X} = 0{,}64\ x\ 8\ cm \rightarrow \boldsymbol{X} \approx \boldsymbol{5\ cm}$$

- ✓ *Para calcular **Y** se puede utilizar teorema de Pitágoras o la función coseno (que contienen el valor de la hipotenusa) o la función tangente (que contiene el valor del cateto opuesto, el cual fue hallado previamente). En este caso se utilizará la función coseno:*

$$cos40° = \frac{Cat.ady}{Hipot} \rightarrow cos40° = \frac{\boldsymbol{Y}}{8\ cm} \rightarrow \boldsymbol{Y} = cos40°\ x\ 8\ cm \rightarrow \boldsymbol{Y} = 0{,}77\ x\ 8\ cm \rightarrow \boldsymbol{Y} \approx \boldsymbol{6\ cm}$$

- En el siguiente triángulo hallar el valor de “a” y “b”



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- ✓ *En este caso se desconoce el valor de la hipotenusa(b) y el cateto opuesto (a)*

- ✓ *Como se conoce el cateto adyacente (12 cm), se puede emplear la función coseno o tangente, que son las que contienen este valor.*
- ✓ *En el caso del cateto b, se utilizará la función coseno:*

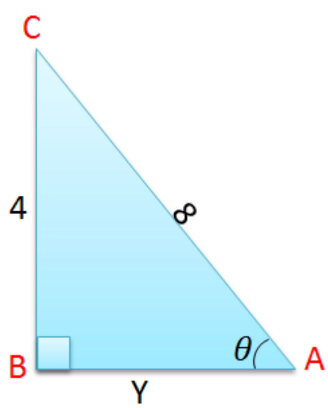
$$Cos25° = \frac{Cat.ady}{hipot} \rightarrow cos25° = \frac{12\ cm}{\boldsymbol{b}} \rightarrow \boldsymbol{b} = \frac{12\ cm}{cos25°} \rightarrow \boldsymbol{b} = \frac{12\ cm}{0,9} \rightarrow \boldsymbol{b} \approx \boldsymbol{13\ cm}$$

- ✓ *Para calcular* ***a*** *se puede utilizar teorema de Pitágoras o la función seno (que contienen el valor de la hipotenusa, la cual fue hallada previamente) o la función tangente (que contiene el valor del cateto adyacente). En este caso se utilizará la función tangente:*

$$Tan25° = \frac{Cat.op.}{Cat.ady} \rightarrow tan25° = \frac{\boldsymbol{a}}{12\ cm} \rightarrow \boldsymbol{a} = tan25°\ x\ 12\ cm \rightarrow \boldsymbol{a} = 0,47\ x\ 12\ cm$$

$$\boldsymbol{a} \approx \boldsymbol{5,6\ cm}$$

- En el siguiente triángulo hallar el valor de "**Y**" y el ángulo θ:



Solución:

- ✓ *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (b)*
- ✓ *En este caso se desconoce el valor del cateto adyacente (Y), para calcularlo se puede utilizar el teorema de Pitágoras.*
- ✓ *Para calcular el cateto se le resta al cuadrado de la hipotenusa el cuadrado del otro cateto:*

$Y^2 = (8)^2 - (4)^2$

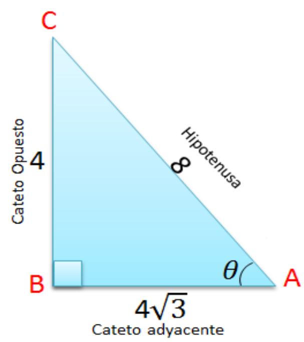
Y² = 64 - 16

Y² = 48

Y= $\sqrt{48}$

Y= $4\sqrt{3} \approx 6{,}9$

Para calcular el ángulo θ*, podemos utilizar las funciones seno, coseno o tangente.*



En este caso utilizaremos la función seno= $\frac{Cat.opuesto}{Hipotenusa} = \frac{4}{8} = 0{,}5$

- ✓ *Para obtener el ángulo debemos hacer uso de la calculadora científica, teniendo en cuenta los siguientes criterios:*
- *Identificar la parte del teclado de la calculadora que vas a tener que utilizar de una manera específica para los ejercicios con razones trigonométricas*.

- *En primer lugar, debes fijarte en el* ***modo de la unidad angular*** *en la que estés trabajando. Generalmente, la unidad por omisión es el grado sexagesimal. Comprueba que en la pantalla de la calculadora aparezca la letra D o DEG. En caso contrario deberás pulsar la secuencia de teclas*

SHIFT MODE (SET UP)

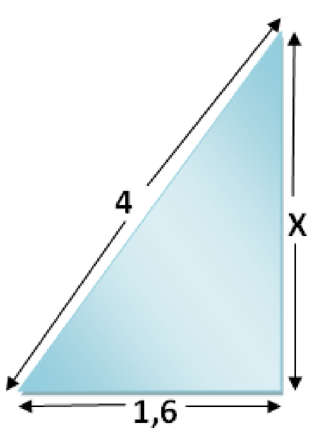
Y elegir DEG para trabajar con grados sexagesimales.

- Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo, pulsa la tecla correspondiente sin cos tan *y después el valor del ángulo.*
- *Si sabemos el valor de una razón trigonométrica y queremos averiguar el ángulo, tendremos que activar las funciones inversas con ayuda de la tecla SHIFT (en algunas calculadoras INV).*
- *En nuestro caso como vamos a calcular el valor de sen*$\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$*= 0,5, debemos activar la función* ***SHIFT – seno – 0,5****. De esta manera nos da el valor del ángulo, el cual es de 30°, por lo tanto* $\boldsymbol{\theta = 30°}$

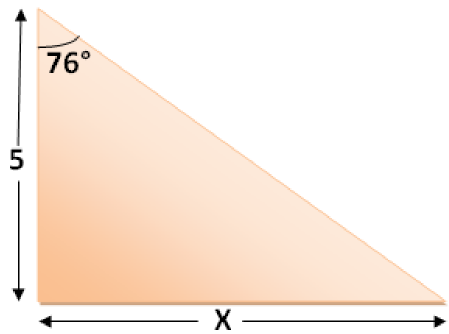
ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

En los siguientes triángulos, haciendo uso de las razones trigonométricas, hallar el valor de la incógnita.

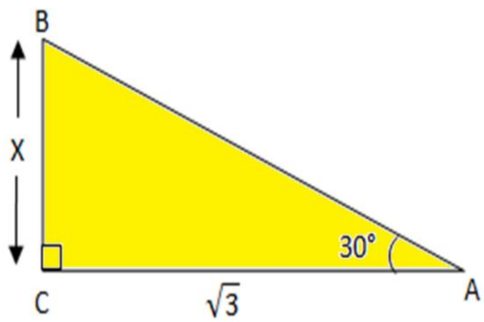
1.



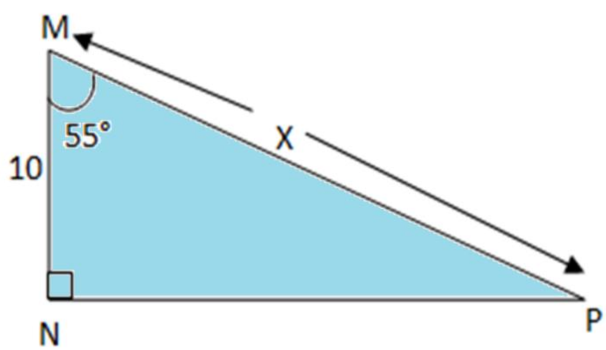
2.



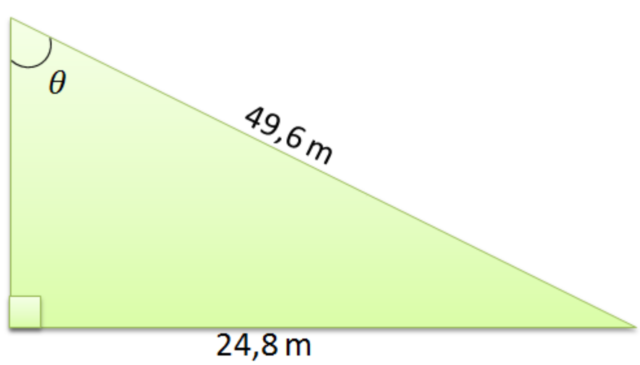
3.



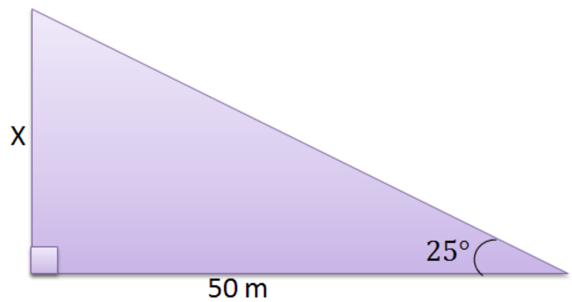
4.



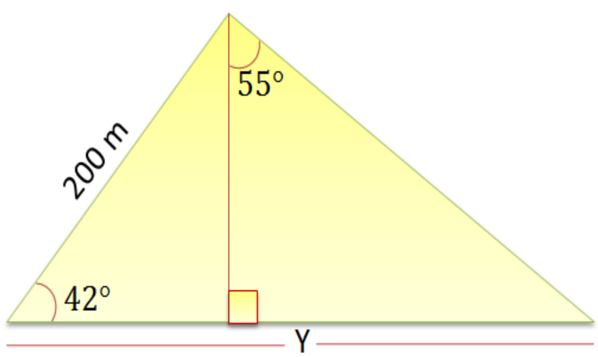
5.



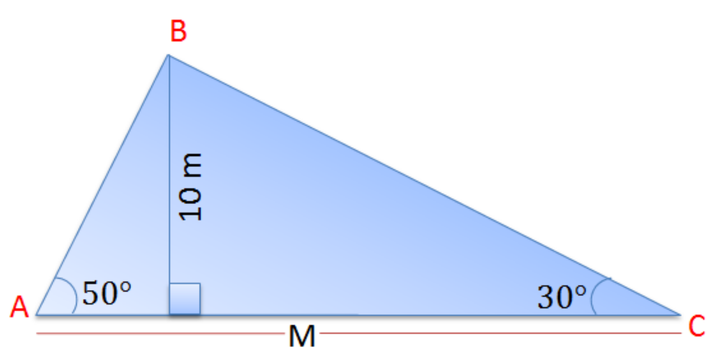
6.



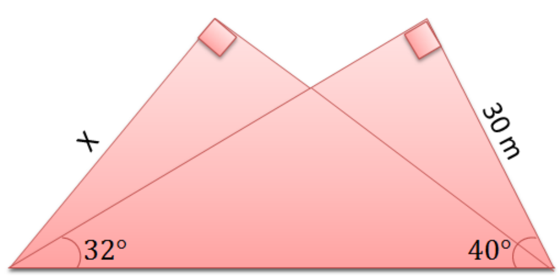
7.



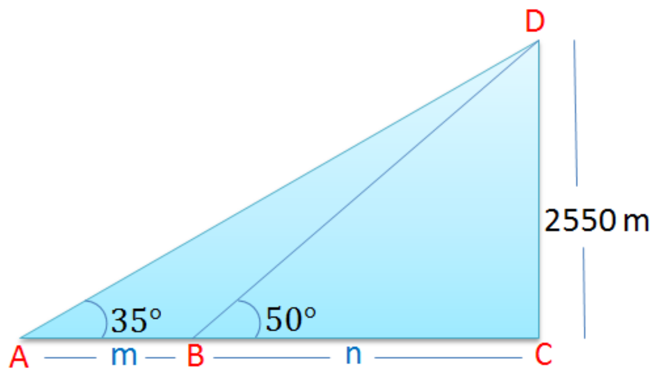
8.



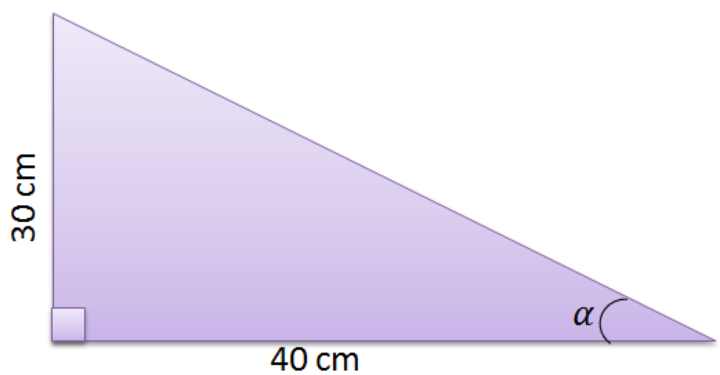
9.



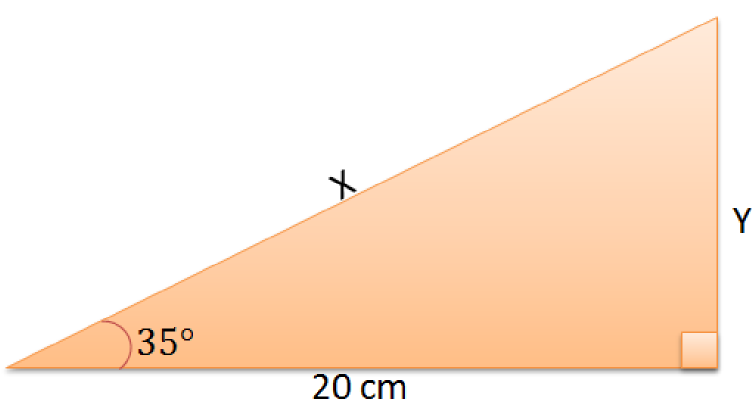
10.



11.



12.



PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

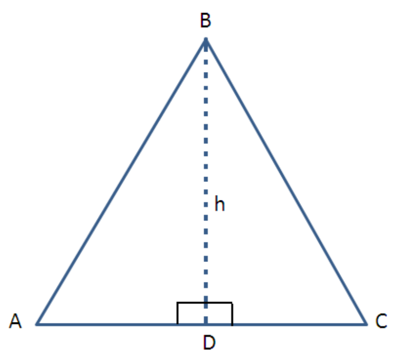
Para resolver situaciones problema relacionados con las razones trigonométricas, es importante tener en cuenta los siguientes aspectos:

- ✓ En todo triángulo rectángulo siempre es conocido uno de sus ángulos interiores, es decir, el ángulo recto. Luego, un triángulo rectángulo puede resolverse si, además del ángulo recto, se conocen dos de sus lados o un lado, y uno de sus ángulos agudos.

- ✓ Cuando en un triángulo rectángulo se conoce uno de sus ángulos agudos, basta restar este valor de 90º (ángulo recto), para obtener el otro ángulo agudo del triángulo en mención.

- ✓ Para hallar un elemento desconocido del triángulo rectángulo, ya sea la longitud de uno de sus lados o el valor de uno de sus ángulos agudos, escogemos una de las razones trigonométricas que contenga dicho elemento y otros dos elementos fundamentales conocidos para despejar el elemento en cuestión.

- ✓ Si el triángulo por resolver no es rectángulo, pero es isósceles o equilátero, entonces se traza la altura correspondiente a la base (perpendicular bajada desde el vértice opuesto a la base) y este quedará dividido en dos triángulos rectángulos congruentes. La resolución de uno de estos dos triángulos rectángulos nos permitirá resolver el triángulo.



- ✓ También es importante conocer, entender y aplicar los conceptos de ángulo de elevación y ángulo de depresión. Estos conceptos se refieren al ángulo entre el horizontal y la línea visual del observador y la posición del objeto.

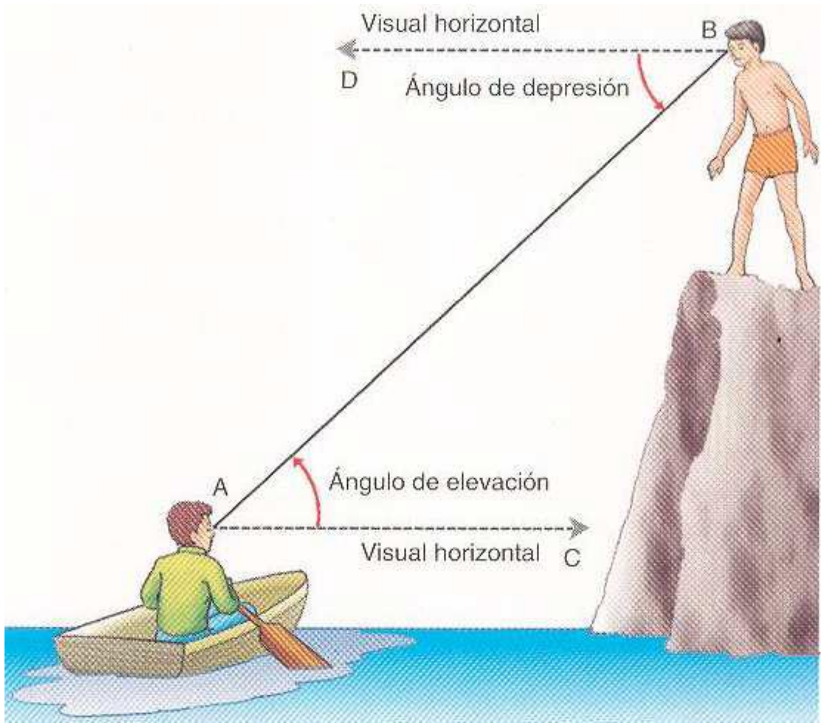
Ángulo de elevación. Si la línea visual del observador al objeto está por encima de la línea horizontal imaginaria.

Ángulo de depresión. Si la línea visual del observador al objeto está por debajo de la línea horizontal imaginaria.

Observa y analiza estos conceptos en la siguiente gráfica:

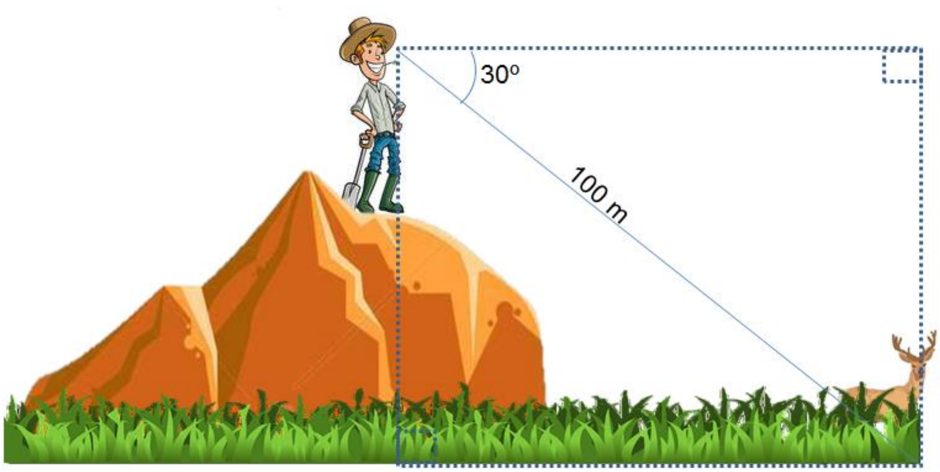
El ∢ CAB es un ángulo de elevación; el punto B está elevado con respecto al observador en A y la línea horizontal AC que pasa por A.

El ∢ DBA es un ángulo de depresión; el punto A queda en la parte de abajo del observador que está en B y de la línea horizontal DB que pasa por B.



EJEMPLOS:

1. Desde lo alto de una colina, una persona observa un venado, bajo un ángulo de depresión de 30°. Si la distancia entre el observador y el venado es de 100 metros. ¿Si la persona mide 1,70 m, cuál es la altura aproximada que tiene la colina?



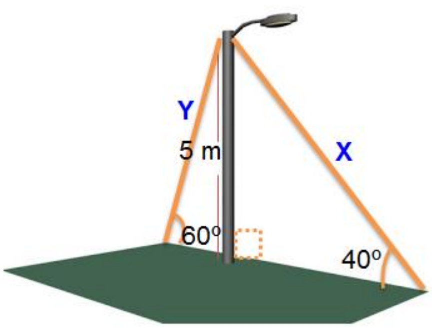
Solución:

- *En este caso para dar solución al ejercicio se puede observar como la distancia entre el observador y el venado (100 m) corresponde a la hipotenusa.*
- *Para calcular la altura de la colina se puede determinar como el cateto opuesto al ángulo de 30°.*
- *La función trigonométrica que contiene el cateto opuesto y la hipotenusa es la función seno.*

  Sen30°$=\frac{X}{100\ m} \to X = sen30°\ x\ 100m \to X = 0{,}5\ X\ 100\ m \to X = 50\ m$
- *Para responder a la pregunta de la altura de la colina, se debe restar a los 50 metros (distancia del punto de observación al suelo) la estatura del observador, por lo tanto, la respuesta es:*

  50 metros – 1,70 metros = ***48,3 metros***

2. Un poste de 5 metros se ha sujetado al suelo por un cable, como muestra la figura:



Calcular la medida de los cables:

Solución:

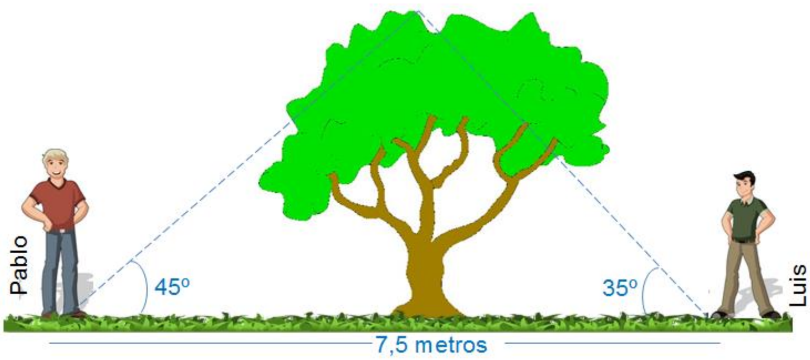
- *En este caso para dar solución al ejercicio se puede observar que la medida del cable corresponde a la hipotenusa y la altura del poste (5 metros) corresponde al cateto opuesto al ángulo de 40° y el cateto opuesto al ángulo de 60°.*
- *La función trigonométrica que contiene el cateto opuesto y la hipotenusa es la función seno.*

  Sen40°$=\frac{5\ m}{X} \to X = \frac{5\ m}{sen40°} \to X = \frac{5\ m}{0{,}64} \to X = 7{,}81\ m$

  Sen60°$=\frac{5\ m}{Y} \to Y = \frac{5\ m}{sen60°} \to Y = \frac{5\ m}{0{,}87} \to Y = 5{,}75\ m$

  $\boxed{\mathbf{13,56\ m}}$

3. Pablo y Luis están situados cada uno a un lado de un árbol, como indica la figura:

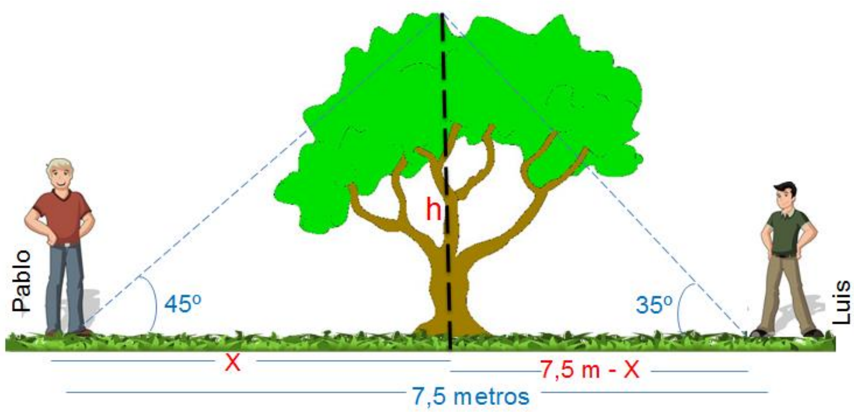


A) Calcular la altura del árbol.

B) ¿A qué distancia está Pablo y Luis del árbol?

Solución:

- ✓ *En este caso para dar solución al ejercicio se puede trazar una línea recta de la cima del árbol al suelo, de tal manera que nos permita establecer dos triángulos rectángulos.*



- ✓ *Para calcular la altura del árbol se puede emplear la función tangente y teniendo en cuenta que desconocemos el valor de algunos catetos y sólo se tiene el total del cateto adyacente, se debe realizar el planteamiento de dos ecuaciones:*

Tan45°$=\frac{h}{x} \rightarrow h = x.tan45°$ *Tan35°*$=\frac{h}{7,5-x} \rightarrow h = (7,5 - x).tan35°$

- ✓ *Igualando las ecuaciones, se tiene:*
  $X.tan45° = (7,5 - x).tan35°$
  $X.tan45° = (7,5\ .tan35°) - (X.tan35°)$
  (X.tan45°) + (X.tan35°) = (7,5.tan35°)

X.(tan45° + tan35°) = (7,5 . 0,7)

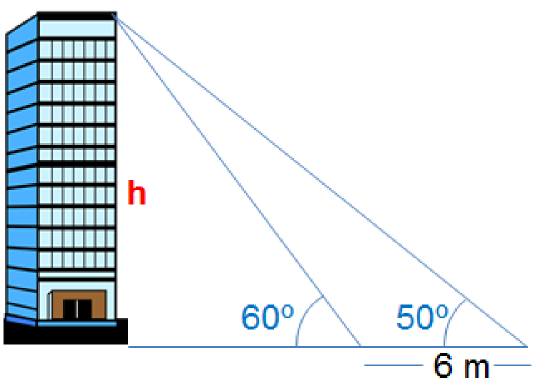
X.(1 + 0,7) = 5,25

X. 1,7 = 5,25

X= $\frac{5,25}{1,7} \rightarrow X = 3,1\ m \rightarrow distancia\ de\ Pablo\ al\ árbol$

- ✓ *Para calcular la altura del árbol se puede emplear la función tangente con cualquiera de los ángulos. En este caso utilizaremos el ángulo de 45°, como el valor de X= 3,1 m, y un triángulo rectángulo de 45° es isósceles, significa que la altura será igual a X* ***(3,1 m)***
- ✓ *Para calcular la distancia de Luis, simplemente, a la distancia de 7,5 m se le resta la distancia a la cual se encuentra Pablo (3,1).*

4. Desde el suelo vemos el punto más alto de un edificio con un ángulo de 60°. Nos alejamos 6 metros en línea recta y este ángulo es de 50°. ¿Cuál es la altura aproximada del edificio?



Solución:

- ✓ *En este caso para dar solución al ejercicio se puede observar que la medida de la altura del edificio corresponde al cateto opuesto a cada uno de los ángulos y el valor de 6 metros corresponde a parte del cateto adyacente.*
- ✓ *Con base en la información anterior se puede utilizar la función tangente.*

Tan60°=$\frac{h}{x} \rightarrow h = x.tan60°$ *Tan50°=*$\frac{h}{x+6\ m} \rightarrow h = (x + 6m).tan50°$

- ✓ *Igualando las ecuaciones se tiene:*

$$\left.\begin{array}{l} x.tan60° = (x + 6m).tan50° \\ x.tan60° = (x.tan50°) + (6\ m\ .tan50°) \end{array}\right\}$$

$$(x.tan60°) - (x.tan50°) = (6\ m.tan50°)$$

$$x.(tan60° - tan50°) = (6m.tan50°)$$

$$x.(1{,}73 - 1{,}19) = (6m\ .1{,}19)$$

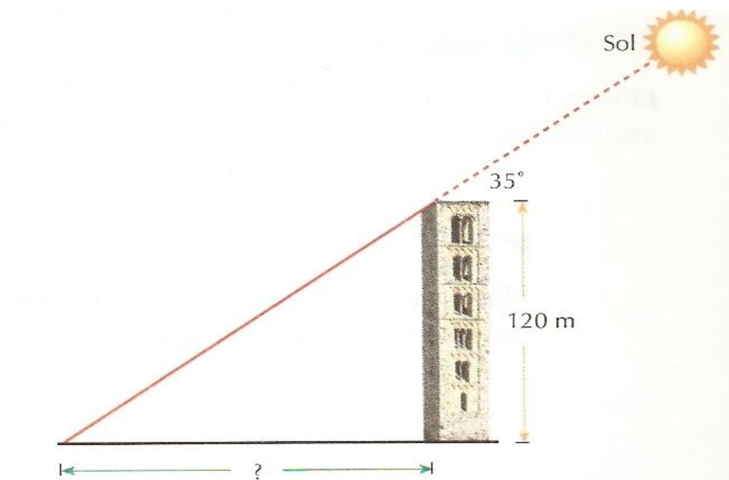
$$x.(0{,}54) = (7{,}14\ m)$$

$$x = \frac{7{,}14\ m}{0{,}54} \rightarrow x = 13{,}2\ m \longrightarrow \boxed{\text{Distancia X}}$$

- ✓ *Para calcular la altura del edificio podemos utilizar el valor de X y el ángulo de 60°, haciendo uso de la función tangente.*

Tan60°= $\frac{h}{x} \rightarrow h = x.tan60° \rightarrow h = 13{,}2\ m\ .1{,}73 \rightarrow \boldsymbol{h = 22{,}84\ metros}$

5. ¿Cuál es la longitud de la sombra que proyecta un edificio de 120 m de altura, cuando el sol presenta un ángulo de elevación de 35° desde la azotea del edificio?

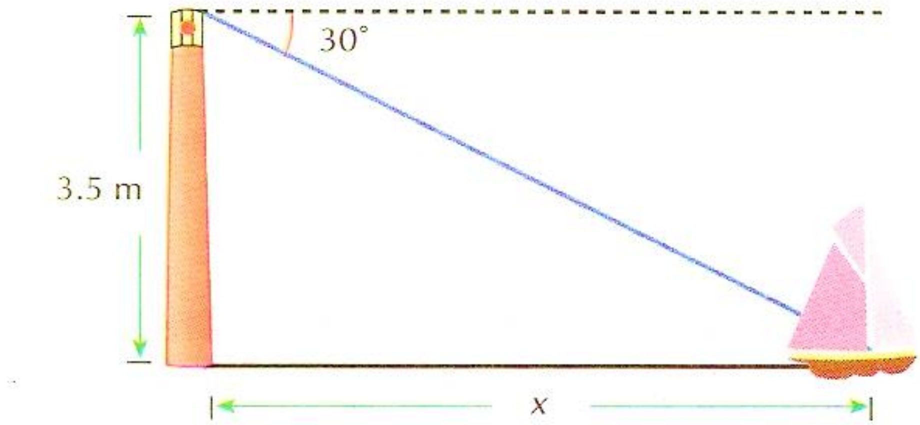


Solución:

- ✓ *En este caso para dar solución al ejercicio se puede observar que la medida del ángulo de elevación del sol (35°) se mantiene constante para el triángulo que se forma entre el edificio y su sombra, la altura del edificio corresponde al cateto opuesto de 35°.*
- ✓ *La sombra del edificio corresponde al cateto adyacente para el ángulo de 35°.*
- ✓ *Con base en la información anterior se puede utilizar la función tangente.*

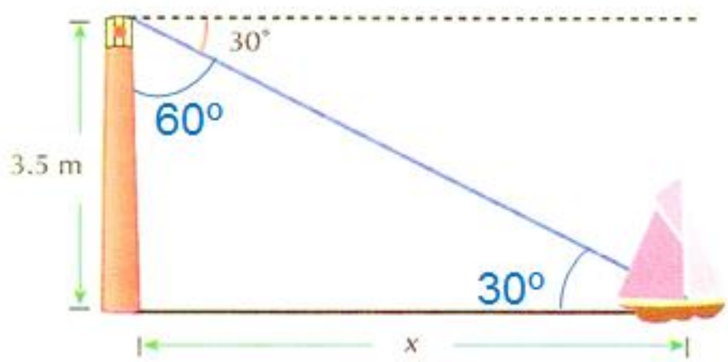
$$tan35° = \frac{altura\ del\ edificio}{sombra} \rightarrow tan35° = \frac{120\ m}{X} \rightarrow X = \frac{120\ m}{tan35°} \rightarrow X = \frac{120\ m}{0{,}7} \rightarrow \boldsymbol{X = 171\ m}$$

6. Desde un faro de 3,5 m de altura se observa un barco con un ángulo de depresión de 30°, como lo muestra la figura. ¿A qué distancia del barco se encuentra el faro?



Solución:

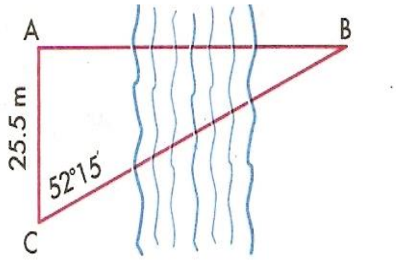
- ✓ *En este caso para dar solución al ejercicio se puede observar que la medida del ángulo de depresión es de 30°, por lo tanto, su complementario será igual a 60°.*



- ✓ *Con la información de estos ángulos se puede emplear la función tan30°=* $\frac{3,5\ m}{X}$*, o también la función tan60°=*$\frac{X}{3,5\ m}$
- ✓ *En este caso utilizaremos la función tan30°=* $\frac{3,5\ m}{X} \rightarrow X = \frac{3,5\ m}{tan30°} \rightarrow X = \frac{3,5\ m}{0,58} \rightarrow$

$$\boldsymbol{X = 6\ metros}$$

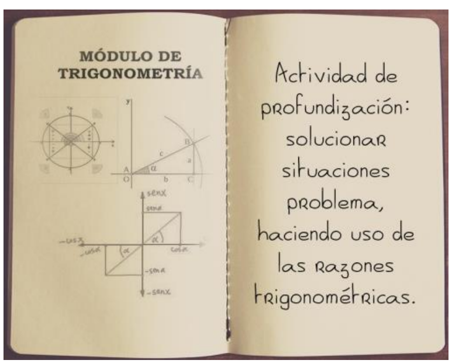
7. Hallar la distancia de A hasta B a través del río.



Solución:

✓ *En este caso para dar solución al ejercicio, la distancia de A hasta B con respecto al ángulo de 52°15’ corresponde al cateto opuesto (X), y la distancia de A hasta C corresponde al cateto adyacente, por lo tanto, se utilizará la función tangente.*

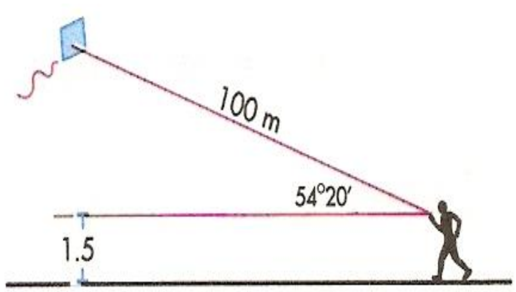
$$tan52°15' = \frac{X}{25{,}5\ m} \rightarrow X = 25{,}5m\ .\ tan52°15' \rightarrow X = 25{,}5\ m\ .\ 1{,}29 \rightarrow X = \mathbf{32{,}9\ m}$$



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

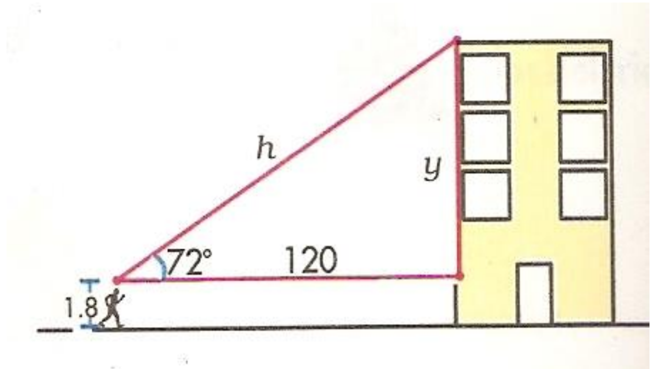
Solucionar las siguientes situaciones problema, haciendo uso de las razones trigonométricas:

1. El cordón de una cometa se encuentra tensionado y forma un ángulo de 54°20´ con la horizontal. Encuentra la altura aproximada de la cometa, respecto al suelo, si el cordón mide 100 m y el extremo del cordón se sostiene a 1,5 m del suelo.

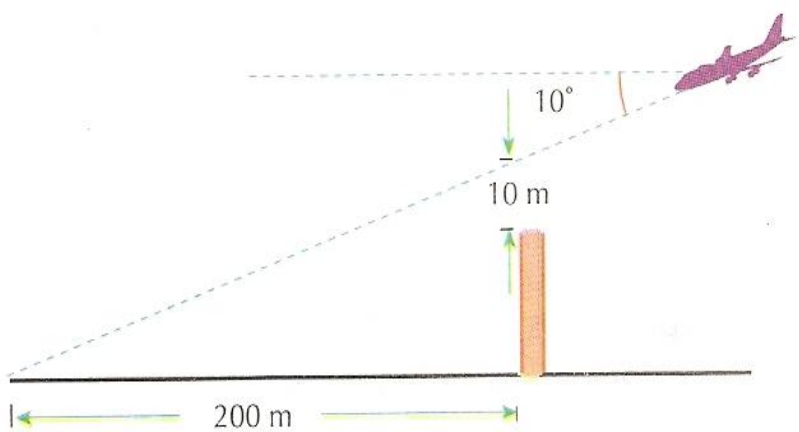


2. Observa la siguiente ilustración:

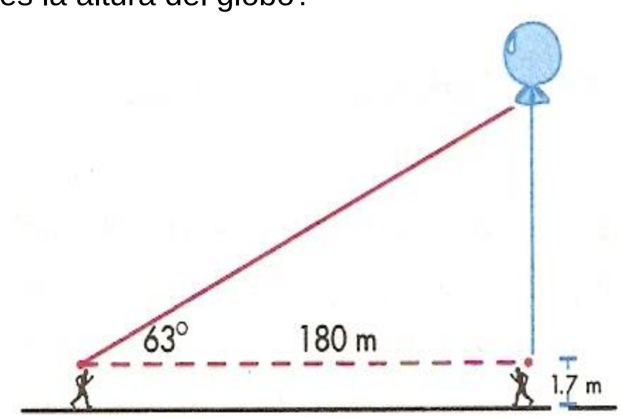
- ¿Cuál es la altura del edificio?
- ¿Cuál es la longitud de la línea que une la cabeza del hombre con la parte de arriba del edificio?



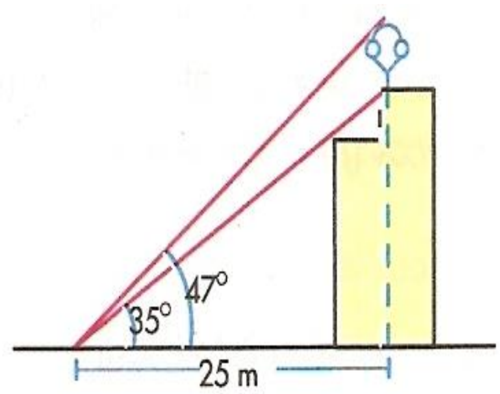
3. Durante un aterrizaje, el piloto pasa 10 m arriba de una muralla y toca tierra 200 metros más allá de la muralla. Si el ángulo de descenso es 10°, ¿cuál es la altura de la muralla?



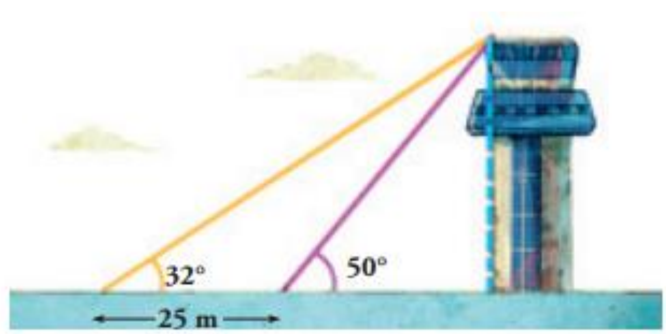
4. En un parque dos jóvenes se encuentran separados por una distancia de 180 m. si uno de ellos ve un globo elevado, exactamente arriba de él, y el otro lo ve con un ángulo de elevación de 63°, ¿cuál es la altura del globo?



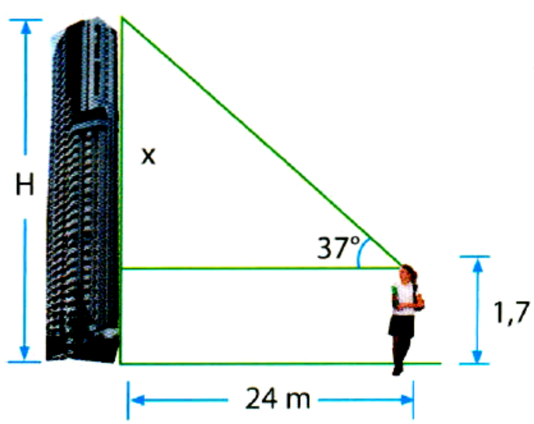
5. Hallar la altura de la antena de radio situada sobre el edificio



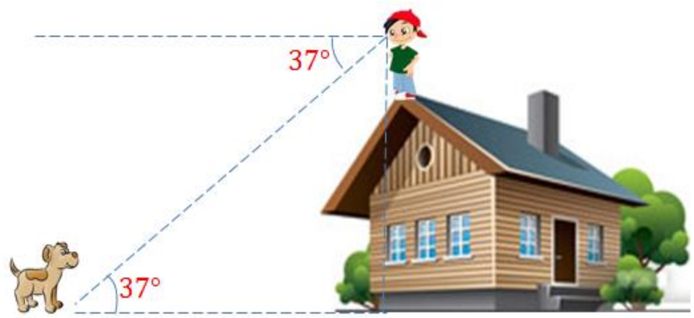
6. Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de 32° con la horizontal. Si me acerco 25 m, el ángulo es de 50°. ¿Cuál es la altura de la torre?



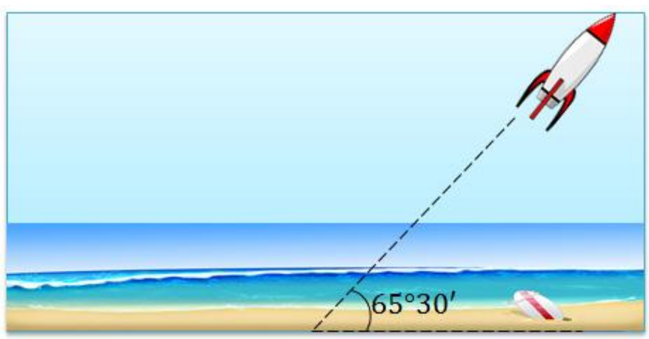
7. Una persona de 1,7 m de estatura, divisa la altura de un edificio con un ángulo de elevación de 37°. Si la persona está a 24 m del edificio, ¿cuál es la altura de edificio?



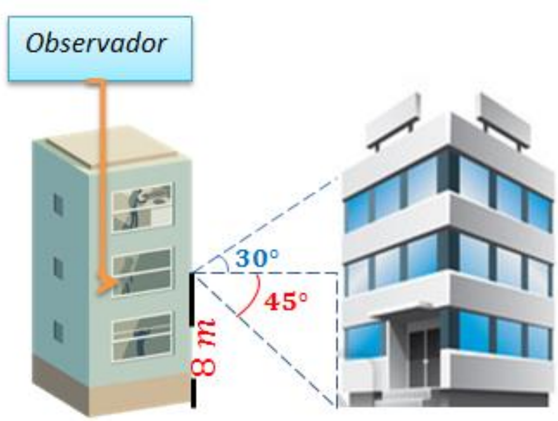
8. Desde la parte más alta del tejado de una vieja casona, un niño observa un perro que se encuentra en la calle con un ángulo de depresión de 37°. Si la altura de la casa es de 9 m y el niño mide 1 metro, ¿a qué distancia de la base de la casa se encuentra el perro?



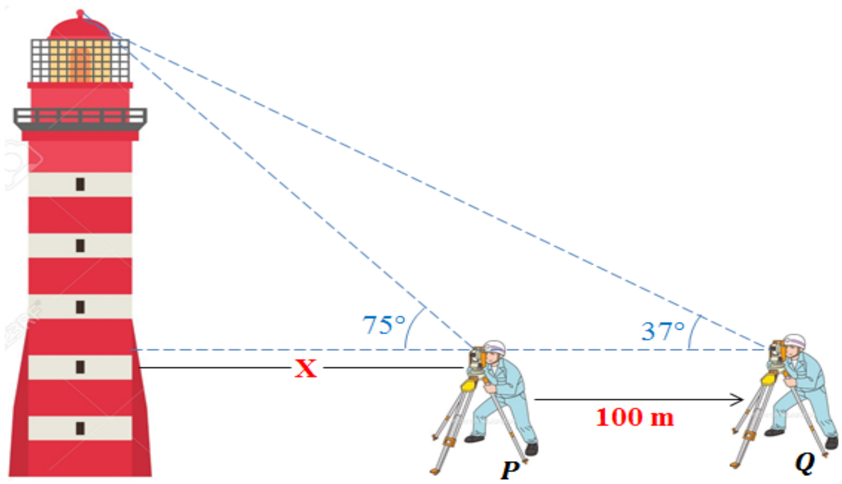
9. Al nivel del mar se lanza un cohete espacial y sube en un ángulo constante de 65°30', recorriendo 18000 metros. Determinar la altura que lleva el cohete respecto al nivel del mar en ese momento.



10. Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento que está situado a 8 metros del suelo y observa el edificio de enfrente de la siguiente manera: la parte superior, con un ángulo de elevación de 30° y la parte inferior, con un ángulo de depresión de 45°. Determinar la altura del edificio de enfrente.



11. David es un estudiante de ingeniería civil que desea medir la altura de una torre. Para ello, ubica el teodolito (instrumento que mide los ángulos de un terreno) en el punto P, a una distancia X de la torre. Mide el ángulo de elevación y obtiene un valor de 75°. Luego se aleja 100 metros en línea recta del punto P hasta Q, mide nuevamente el ángulo de elevación y obtiene 37°, ¿cuánto mide la torre si el teodolito tiene una altura de 1,5 metros?



12. Calcula la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas: — El ángulo que forma la visual hacia la luz con la línea de horizonte es de 25°. — Nos alejamos 200 metros y el ángulo que forma ahora dicha visual es de 10°.

13. Los lados de un paralelogramo miden 12 y 20 cm, respectivamente, y forman un ángulo de 60°. ¿Cuánto mide la altura del paralelogramo? ¿Y su área?

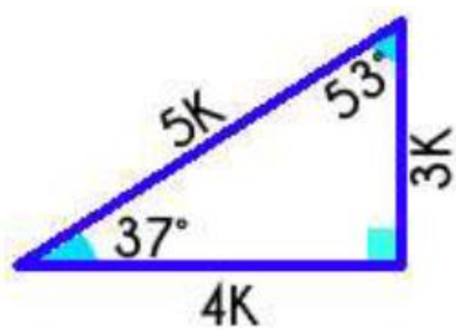
14. Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento, el avión se encuentra a una altura de 1 200 metros y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de 30°. ¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si esta mide 40 m de altura?

15. Dos edificios distan entre sí 150 metros. Desde un punto del suelo que está entre los dos edificios, vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20°. ¿Cuál es la altura de los edificios, si sabemos que los dos miden lo mismo?

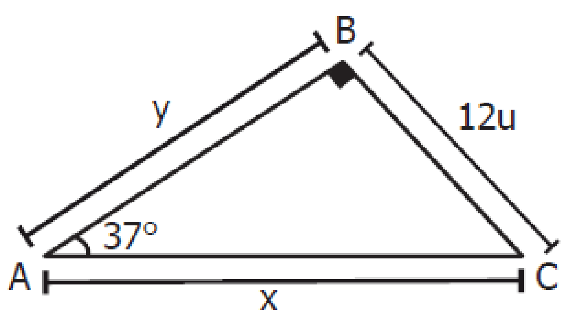
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA LOS ÁNGULOS ESPECIALES

TRIÁNGULOS DE 37° - 53° - 90°

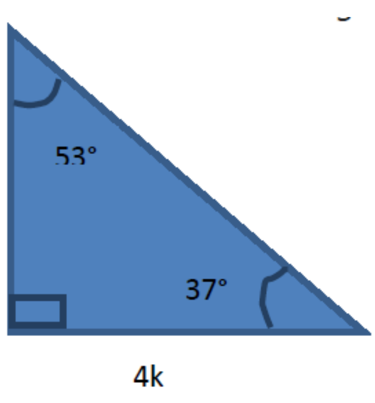
Este **triangulo tiene** un ángulo de **37** y otro de **53**, donde el **lado** opuesto al ángulo de **37** medirá 3k, el opuesto a **53** medirá 4k y la hipotenusa medirá 5k. Es un **triángulo** de medidas aproximadas, es decir, que sus medias no son **exactas** y solo es una aproximación.



Calcula «x – y».



Calcular el sen 37° del siguiente triángulo:



Solución:

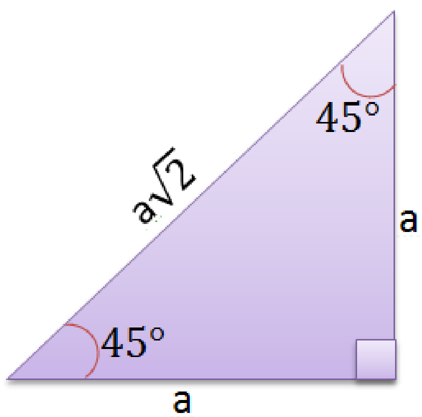
$\text{Sen } 37° = \frac{c.o}{H}$

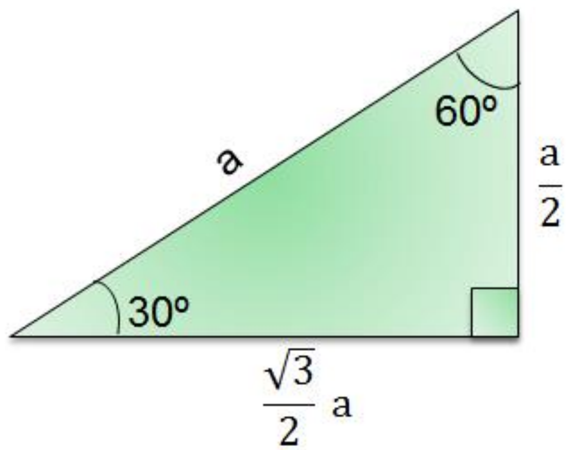
$\text{Sen } 37° = \frac{3K}{5k}$

$\text{Sen } 37° = \frac{3}{5}$

En los ángulos especiales de 30°, 45°, 60° o $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ radianes, se tiene en cuenta las siguientes propiedades:

- En un triángulo rectángulo e isósceles los catetos son iguales.
- En un triángulo rectángulo con ángulos interiores de 30° y 60°, el lado opuesto al ángulo de 30° tiene una longitud igual a la mitad de la hipotenusa.





De acuerdo con las definiciones de las funciones trigonométricas, se tiene:

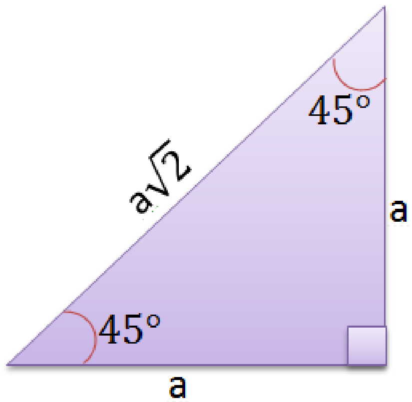
$\text{Sen}\theta = \frac{\text{Cat.Op.}}{\text{Hipot.}}$ $\text{Cos}\theta = \frac{\text{Cat.Ady.}}{\text{Hipot.}}$ $\text{Tan}\theta = \frac{\text{Cat.Op.}}{\text{Cat.ady.}}$

Ángulo de 45°

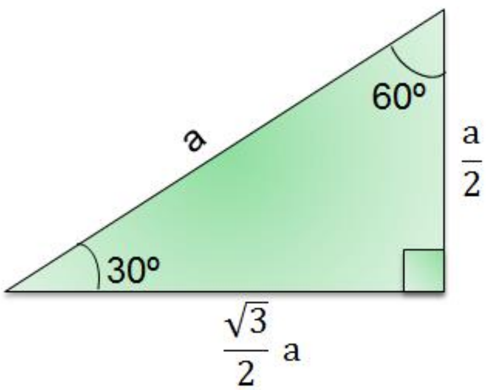
$$\text{Sen}45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ x\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cos } 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ x\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Tan}45° = \frac{a}{a} = 1$$



Ángulo de 30°

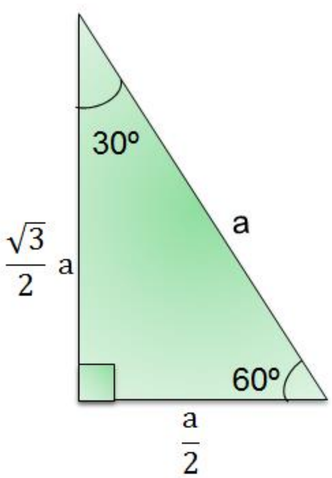


$$\text{Sen}30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cos}30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{a\sqrt{3}}{a.2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Tan}30° = \frac{\frac{a}{2}}{a.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a}{a.2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ x\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ángulo de 60°



$$\text{Sen}60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}.a}{\frac{a}{1}} = \frac{a\sqrt{3}}{a.2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Cos}60° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{a}{a.2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tan}60° = \frac{\frac{\sqrt{3}\ .a}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{2.\sqrt{3}\ .a}{2.a} = \sqrt{3}$$

Los ángulos especiales de 30°, 45° y 60° unidos a los de 0° y 90° se consideran en trigonometría como ángulos notables y el resumen de las funciones trigonométricas para estos ángulos se pueden establecer de la siguiente manera:

Angulo en grados	0°	30°	45°	60°	90°
Senθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tanθ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No definida

PROCEDIMIENTO PARA HALLAR EL VALOR DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS SIN CALCULADORA

- Primero dibujamos un símbolo de raíz grande, tal como éste…

$$\sqrt{\qquad\qquad\qquad}$$

- Escribimos dentro dos filas de números, en la parte superior una que vaya del *0* al *4*, y en la parte inferior otra que vaya al revés, del *4* al *0*…

$$\sqrt{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}}$$

- Dibujamos una barra grande debajo y un *2* bajo ella…

$$\frac{\sqrt{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}}}{2}$$

Y ahora lo completamos con lo que nos interesa saber…

	0º	30º	45º	60º	90º
sen	0	1	2	3	4
cos	4	3	2	1	0

$$\frac{\sqrt{}}{2}$$

Ya podemos saber el *seno* o el *coseno* de cualquiera de estos ángulos notables.

- El procedimiento es bastante sencillo. El resultado va a ser la raíz de un número entre 2, y ese número es el que corresponde a la fila del *sen* o del *cos* (según queramos calcular el *seno* o el *coseno*) y a la columna del *ángulo notable* en cuestión. Después tan solo tenemos que simplificar el resultado obtenido, si se puede. Vamos a hacer unos ejemplos que así se ve mucho mejor.

Supongamos que queremos saber el *sen* 30º…

	0º	30º	45º	60º	90º
sen	0	1	2	3	4
cos	4	3	2	1	0

$$\frac{\sqrt{}}{2}$$

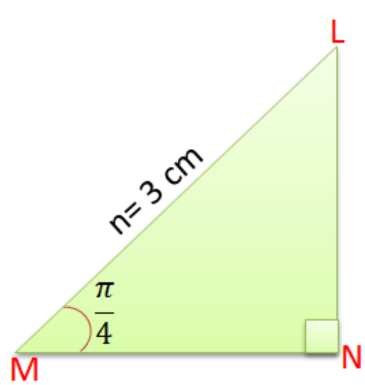
Es decir:

$$sen\,30^{\circ}=\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$$

Debemos recordar que para hallar la tangente sólo es necesario dividir seno entre coseno.

EJEMPLOS:

1. Encontrar el perímetro del triángulo rectángulo.



Solución:

- *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto (n)*
- *En este caso se desconoce el valor del cateto opuesto (m) y adyacente (l), para calcularlo se puede tener en cuenta que un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ corresponde a 45°*
- *Teniendo en cuenta que el triángulo es isósceles, ambos catetos tendrán la misma medida.*
- *Si la hipotenusa es igual a un cateto por $\sqrt{2}$ (m.$\sqrt{2}$), entonces se puede despejar la incógnita.*

Hipotenusa= m.$\sqrt{2}$, entonces: m=$\frac{hip.}{\sqrt{2}}$, reemplazando los valores se obtiene:

m=$\frac{3\ cm}{\sqrt{2}}$, racionalizando denominador se obtiene m=$\frac{3\ cm}{\sqrt{2}}\ x\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}\ cm}{2}$

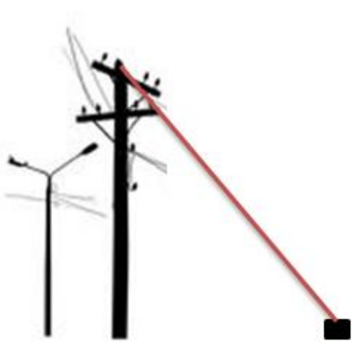
- *Para calcular el perímetro se suma el valor de la hipotenusa y se puede multiplicar por dos el valor del cateto obtenido anteriormente, dado que se trata de un triángulo isósceles.*

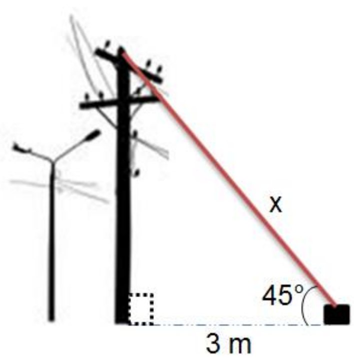
  Perímetro = 3 cm + 2.$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\ cm\right)$, se cancela el 2 que multiplica con el 2 que divide:

Perímetro= 3 cm + 3$\sqrt{2}$ cm, factorizando (factor común) se obtiene como resultado final:

Perímetro= 3 (1 + $\sqrt{2}$) cm

2. Un extremo de un alambre de soporte debe ser colocado en el extremo superior de un poste telefónico de 3 metros de altura y el otro debe fijarse en el suelo formando un ángulo de 45° con el suelo. ¿Cuál debe ser la longitud del alambre?





Solución:

- *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto*
- *En este caso la longitud del cable corresponde al valor de la hipotenusa (X) y el ángulo que se forma mide 45°, lo que lo hace un triángulo isósceles.*
- *Teniendo en cuenta que el triángulo es isósceles, ambos catetos tendrán la misma medida.*
- *La hipotenusa es igual a un cateto por* $\sqrt{2}$.

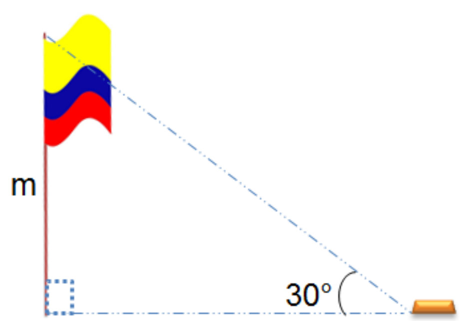
X= cateto.$\sqrt{2}$

X= 3$\sqrt{2}$ *metros*

- *También se pudo utilizar la función trigonométrica coseno, que es la relación entre el cateto adyacente y la hipotenusa:*

$$Cos45° = \frac{3\ metros}{X},\ X = \frac{3\ metros}{Cos45°} = X = \frac{3\ metros}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = X = \frac{6\ metros}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}\ x\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\ m.$$

3. Desde un punto al nivel del suelo y a una distancia de 7,5 metros de la base de una asta de bandera se ve su punta. El ángulo que forman el suelo y la línea que va de dicho punto hasta la punta de la asta es de 30°. Calcule la altura de la asta.



Solución:

- *Lo primero que determinaremos será la ubicación de los catetos y la hipotenusa, recordando que la hipotenusa siempre queda frente al ángulo recto.*
- *En este caso la altura de la asta corresponde al lado opuesto al ángulo de 30°, que sería el cateto más corto y 7,5 metros corresponde al cateto adyacente (cateto largo).*

- ✓ *Utilizando las fórmulas para triángulos especiales:*

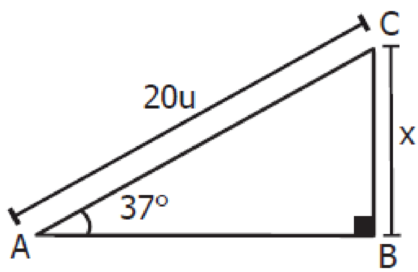
Cateto Corto= $\dfrac{\textbf{Cateto Largo}}{\sqrt{3}}$ =

Cateto corto= $\frac{7,5\ m}{\sqrt{3}} = \frac{7,5\ m}{\sqrt{3}}\ x\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7,5\sqrt{3}\ m}{3} = 2,5\sqrt{3}\ m$

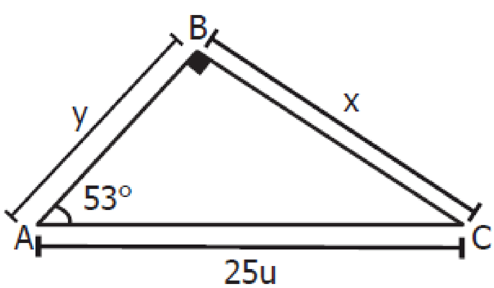
- ✓ *Utilizando las razones trigonométricas, la altura de la asta corresponde al cateto opuesto y 7,5 metros corresponde al cateto adyacente, por tanto, se puede utilizar la razón trigonométrica tangente.*

Tan30°= $\frac{m}{7,5} = m = Tan30°\ x\ 7,5\ metros = m = \frac{\sqrt{3}}{3}\ x\ 7,5\ metros = 2,5\sqrt{3}\ metros$

4. Encontrar el valor de “X”



5. Encontrar el valor de “X” y de “Y”



6. Calcular “x – y”